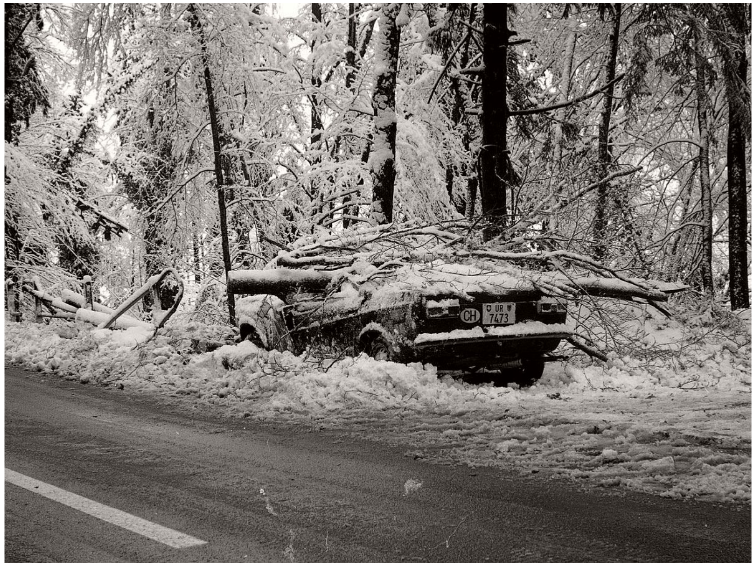
Actuariat de l'Assurance Non-Vie # 7

A. Charpentier (Université de Rennes 1)



ENSAE 2017/2018

credit: Arnold Odermatt

Modèlisation des coûts individuels

Références: Frees (2010), chapitre 13, de Jong & Heller (2008), chapitre 8, et Denuit & Charpentier (2005), chapitre 11.

```
>  sinistre=read.table("http://freakonometrics.free.fr/
    sinistreACT2040.txt",header=TRUE,sep=";")
> contrat=read.table("http://freakonometrics.free.fr/contractACT2040.
    txt",header=TRUE,sep=";")
> contrat=contrat[,1:10]
> names(contrat)[10]="region"
> sinistre_DO=sinistre[(sinistre$garantie=="2DO")&(sinistre$cout>0),]
> sinistre_RC=sinistre[(sinistre$garantie=="1RC")&(sinistre$cout>0),]
> base_DO=merge(sinistre_DO,contrat)
> dim(base_DO)
[1] 1735   13
> base_RC=merge(sinistre_RC,contrat)
> dim(base_RC)
[1] 1924   13
```

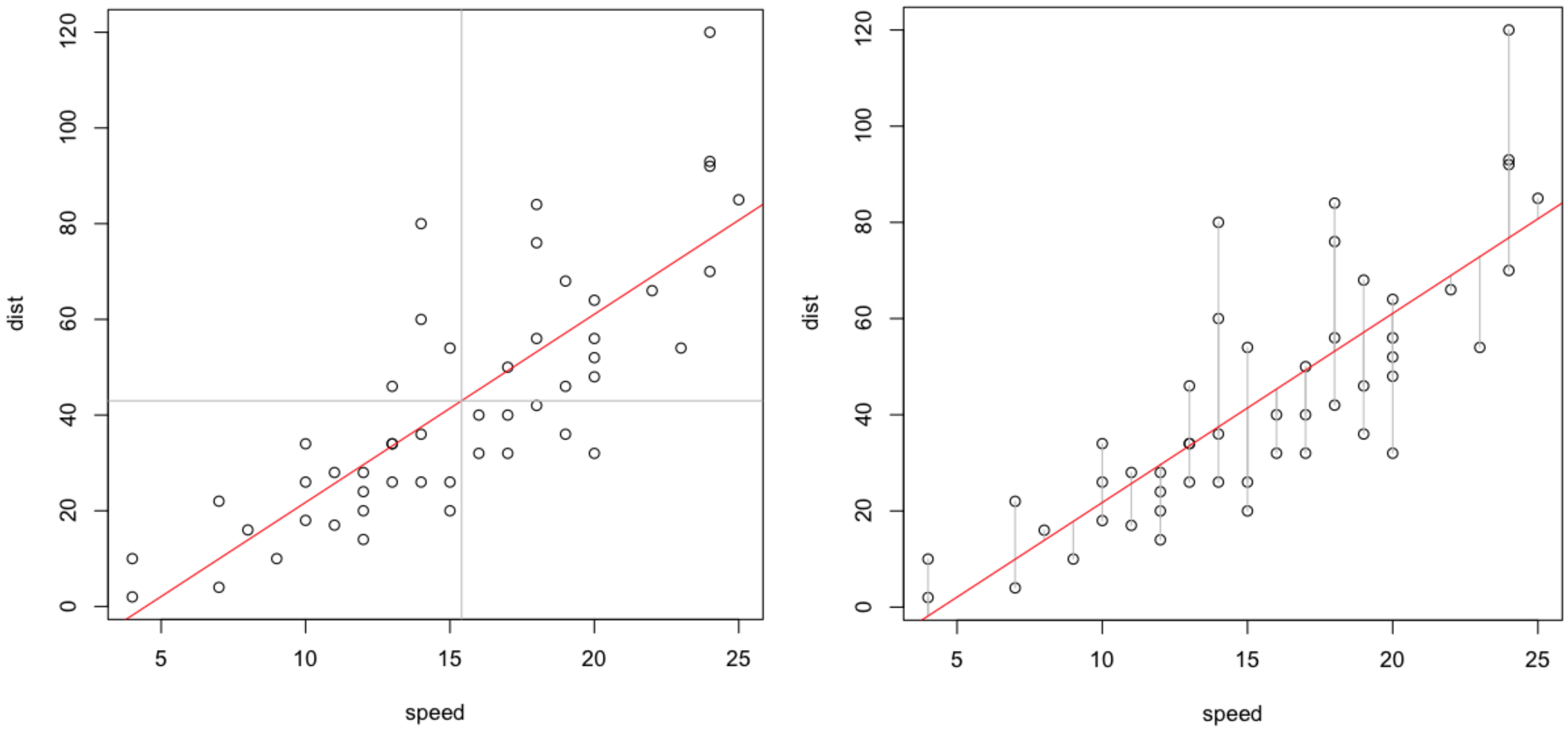
Modèlisation des coûts individuels

Préambule: avec le modèle linéaire, nous avions $\displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i$

```
> reg=lm(dist~speed,data=cars)
> sum(cars$dist)
[1] 2149
> sum(predict(reg))
[1] 2149
```

C'est lié au fait que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \widehat{\varepsilon}_i = 0$, i.e.

"*la droite de régression passe par le barycentre du nuage*".


dist
speed
0
20
40
60
80
100
120
5
10
15
20
25

Cette propriété était conservée avec la régression log-Poisson, nous avions que $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu}_i E_i$, où $\widehat{\mu}_i \cdot E_i$ est la prédiction faite avec l'exposition, au sens où

```
>  sum(freq$nombre_RC)
[1] 1924
>  reg=glm(nombre_RC~1+offset(log(exposition)),data=freq,
+  family=poisson(link="log"))
> sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1924
>  sum(predict(reg,newdata=data.frame(exposition=1),
+  type="response")*freq$exposition)
[1] 1924
```

et ce, quel que soit le modèle utilisé !

```
> reg=glm(nombre_RC~offset(log(exposition))+ageconducteur+
+ zone+carburant,data=freq,family=poisson(link="log"))
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1924
```

... mais c'est tout. En particulier, cette propriété n'est pas vérifiée si on change de fonction lien,

```
>  reg=glm(nombre_RC~1+log(exposition),data=freq,
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1977.704
```

ou de loi (e.g. binomiale négative),

```
> reg=glm.nb(nombre_RC~1+log(exposition),data=freq)
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1925.053
```

Conclusion: de manière générale $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i$

La loi Gamma

La densité de Y est ici

$$f(y) = \frac{1}{y\Gamma(\phi^{-1})}\left(\frac{y}{\mu\phi}\right)^{\phi^{-1}} \exp\left(-\frac{y}{\mu\phi}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

qui est dans la famille exponentielle, puisque

$$f(y) = \exp\left[\frac{y/\mu - (-\log\mu)}{-\phi} + \frac{1-\phi}{\phi}\log y - \frac{\log\phi}{\phi} - \log\Gamma\left(\phi^{-1}\right)\right], \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

On en déduit en particulier le lien canonique, $\theta = \mu^{-1}$ (fonction de lien inverse). De plus, $b(\theta) = -\log(\mu)$, de telle sorte que $b'(\theta) = \mu$ et $b''(\theta) = -\mu^2$. La fonction variance est alors ici $V(\mu) = \mu^2$.

Enfin, la déviance est ici

$$D = 2\phi[\log\mathcal{L}(y,y) - \log\mathcal{L}(\mu,y)] = 2\phi\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_i}{\mu_i} - \log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right)\right).$$

La loi lognormale

La densité de Y est ici

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

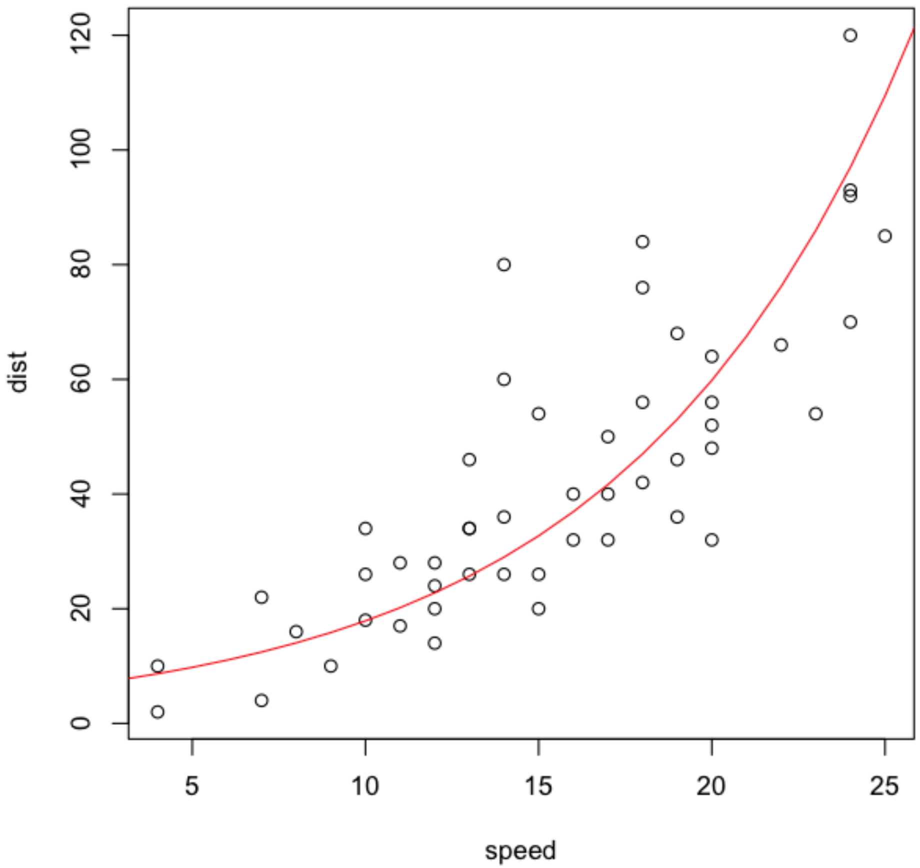
Si Y suit une loi lognormale de paramètres μ et σ^2, alors $Y = \exp[Y^\star]$ où $Y^\star \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. De plus,

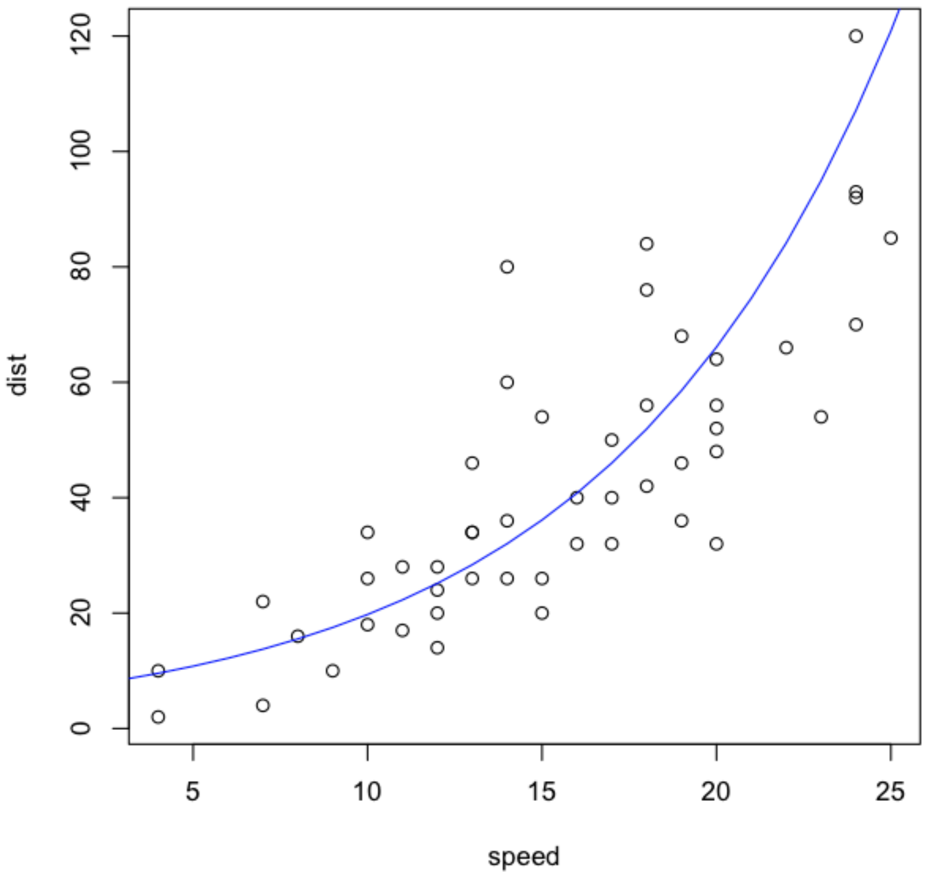
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\exp[Y^\star]) \neq \exp\left[\mathbb{E}(Y^\star)\right] = \exp(\mu).$$

Rappelons que $\mathbb{E}(Y) = e^{\mu+\sigma^2/2}$, et $\text{Var}(Y) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$.

```
> plot(cars)
> regln=lm(log(dist)~speed,data=cars)
> nouveau=data.frame(speed=1:30)
> preddist=exp(predict(regln,newdata=nouveau))
```

```
> lines(1:30,preddist,col="red")
> (s=summary(regln)$sigma)
[1] 0.4463305
> lines(1:30,preddist*exp(.5*s^2),col="blue")
```





Remarque là encore, $\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\widehat{Y}_i^\star + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

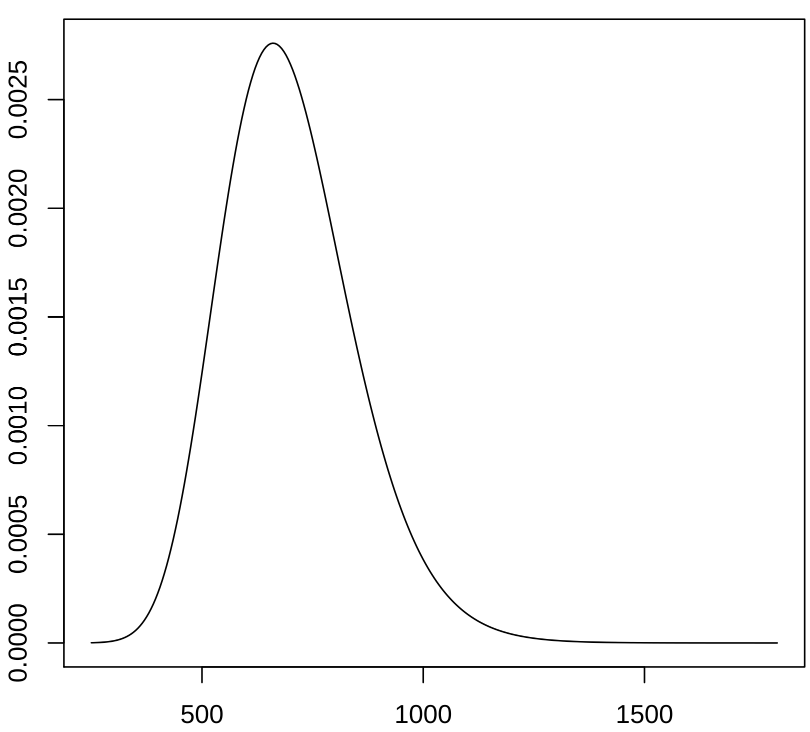
```
> sum(cars$dist)
[1] 2149
> sum(exp(predict(regln)))
[1] 2078.34
> sum(exp(predict(regln))*exp(.5*s^2))
[1] 2296.015
```

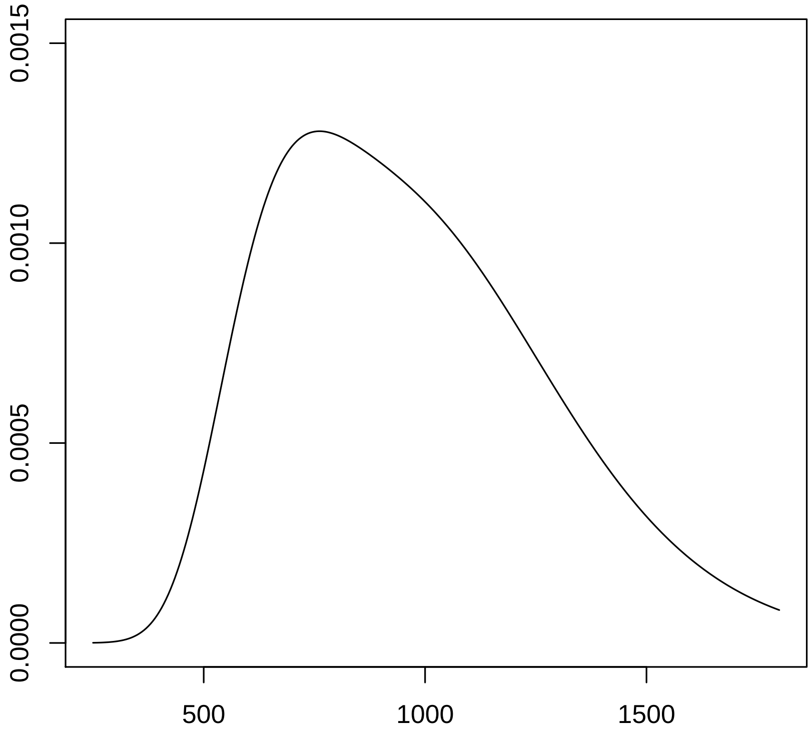
même si on ne régresse sur aucune variable explicative...

```
> regln=lm(log(dist)~1,data=cars)
> (s=summary(regln)$sigma)
[1] 0.7764719
> sum(exp(predict(regln))*exp(.5*s^2))
[1] 2320.144
```

(estimateur du maximum de vraisemblance $\neq$ estimateur de la méthode des moments)

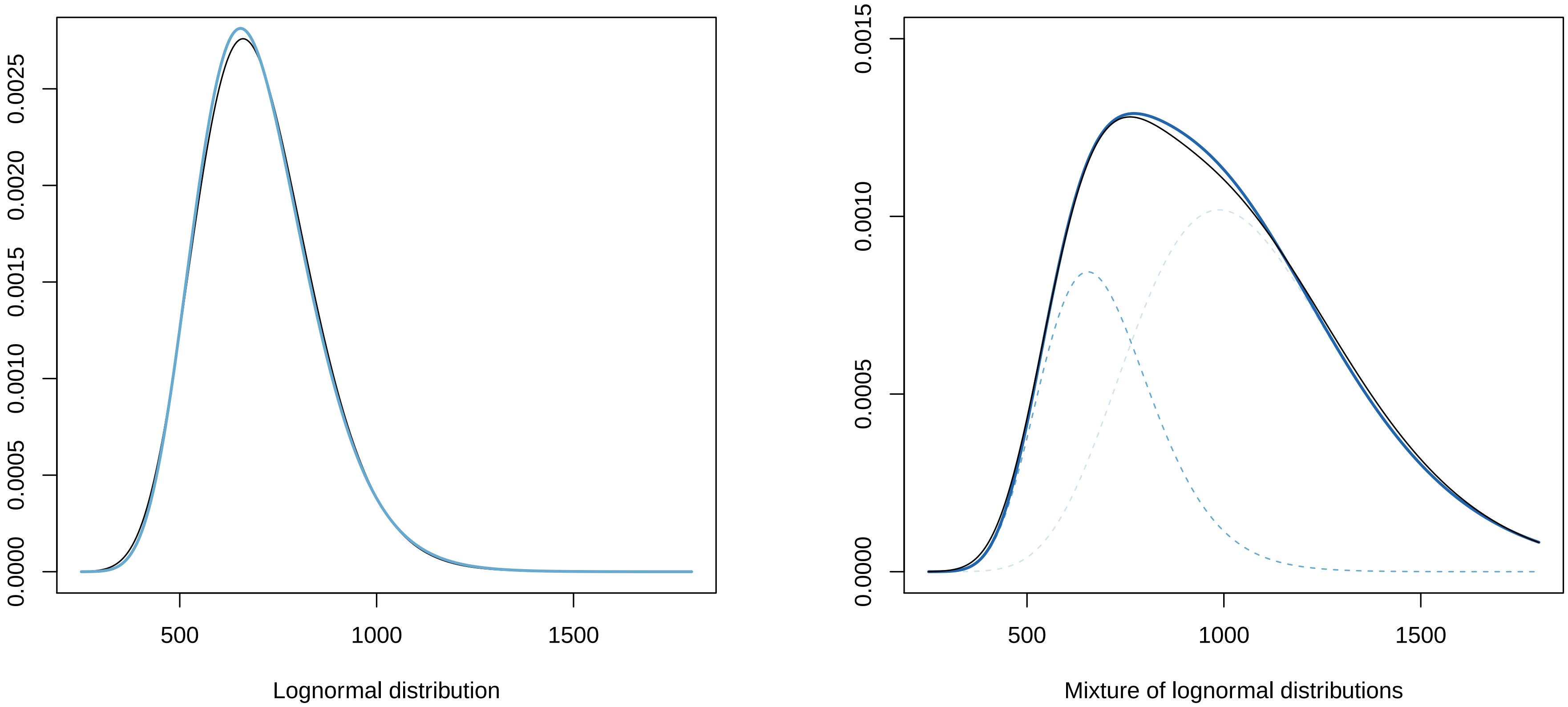
Loi Gamma ou loi lognormale ?





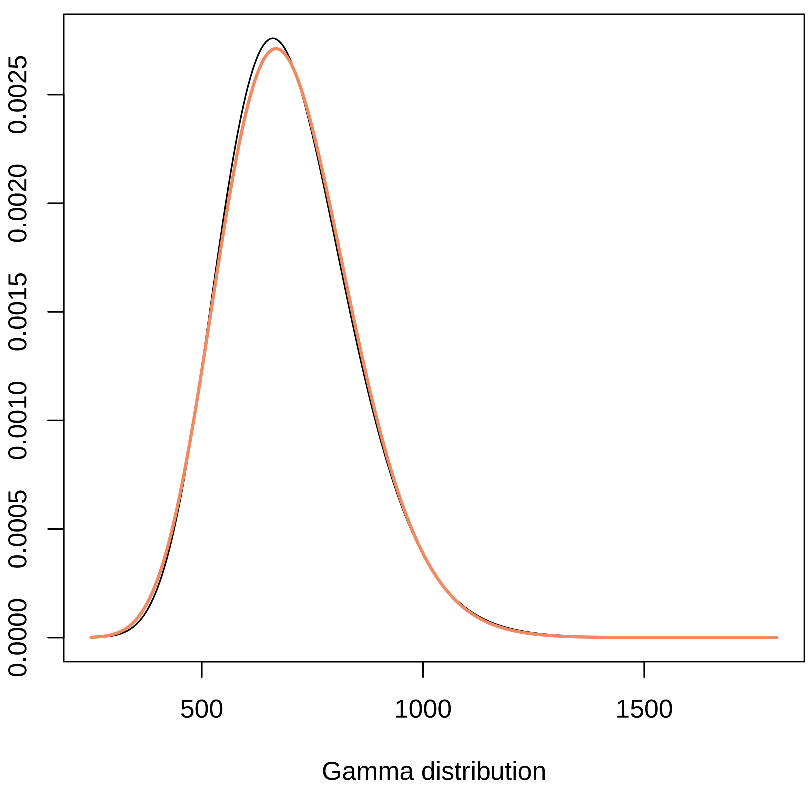
Loi Gamma ou loi lognormale ?

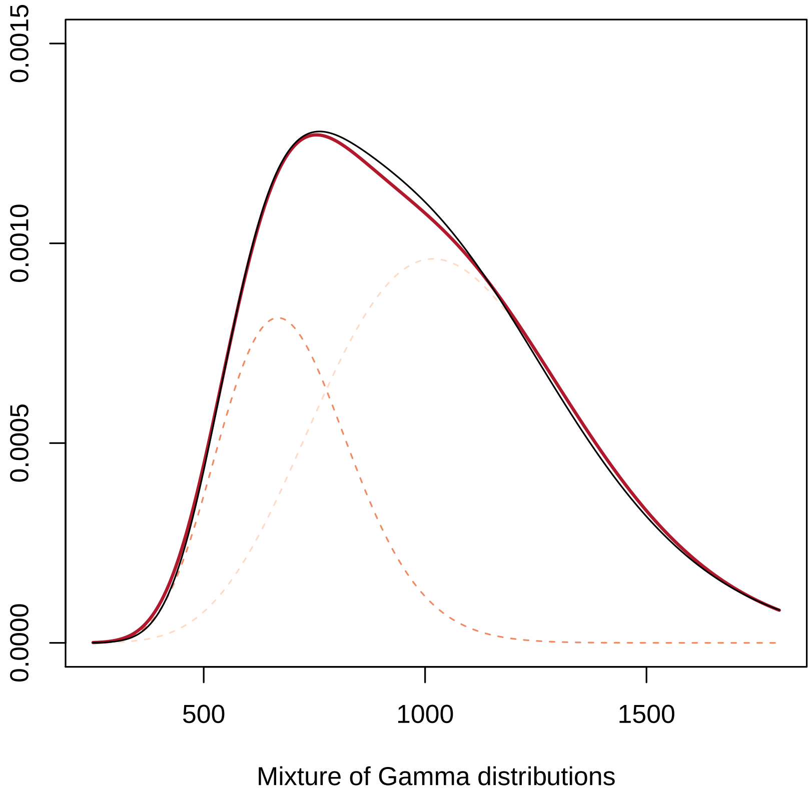
Loi Gamma ? Mélange de deux lois Gamma ?



Loi Gamma ou loi lognormale ?

Loi lognormale ? Mélange de deux lois lognormales ?





Autres lois possibles

Plusieurs autres lois sont possibles, au sein de la famille exponentielle, comme la loi inverse Gaussienne,

$$f(y)=\left[\frac{\lambda}{2\pi y^3}\right]^{1/2}\exp\left(\frac{-\lambda(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right),\quad \forall y\in\mathbb{R}_+$$

de moyenne μ (qui est dans la famille exponentielle) ou la loi loi exponentielle

$$f(y)=\lambda\exp(-\lambda y),\quad \forall y\in\mathbb{R}_+$$

de moyenne λ^{-1}.

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression Gamma (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}]$), on a

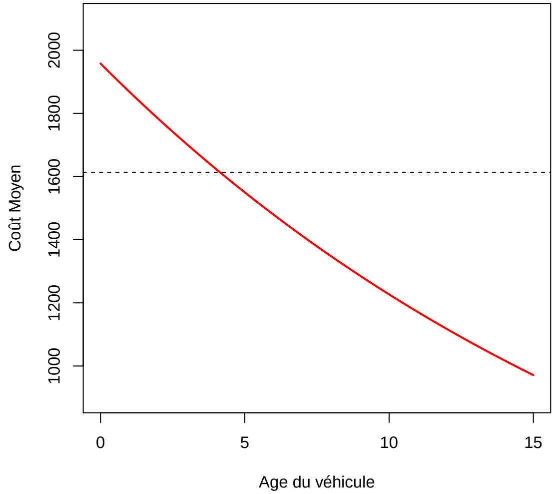
```
> regg=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=base_RC,
+        family=Gamma(link="log"))
> summary(regg)
(Intercept)  7.72660    0.09300  83.079  < 2e-16 ***
agevehicule -0.04674    0.00855  -5.466 5.27e-08 ***
carburantE  -0.14693    0.06329  -2.321  0.02038 *
zoneB       -0.14876    0.12690  -1.172  0.24124
zoneC       -0.04275    0.09924  -0.431  0.66668
zoneD       -0.11026    0.10416  -1.058  0.28998
zoneE       -0.12129    0.10478  -1.158  0.24719
zoneF       -0.47684    0.18142  -2.628  0.00865 **

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1.686782)
```

Les régressions Gamma

Régression Gamma, avec un lien logarithmique

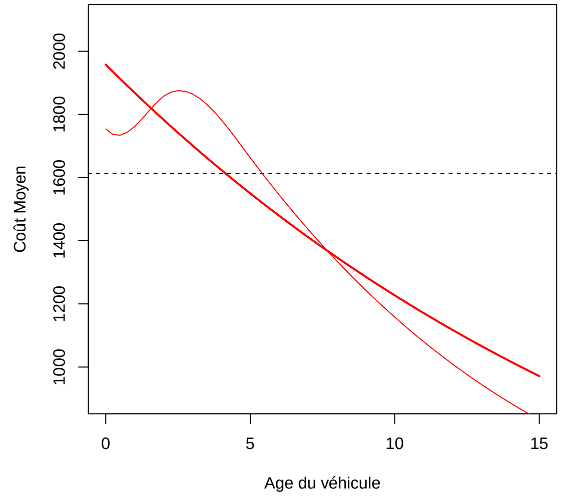
```
> regg=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,
    data=base_DO,family=Gamma(link="log"))
> nd=data.frame(agevehicule=seq(0,15,by=.25),
    carburant="E",zone="A")
> yp=predict(regg,newdata=nd,type="response")
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
> abline(h=mean(base_DO$cout),lty=2)
```



Les régressions Gamma

Régression Gamma, avec un lien logarithmique, avec du lissage (splines)

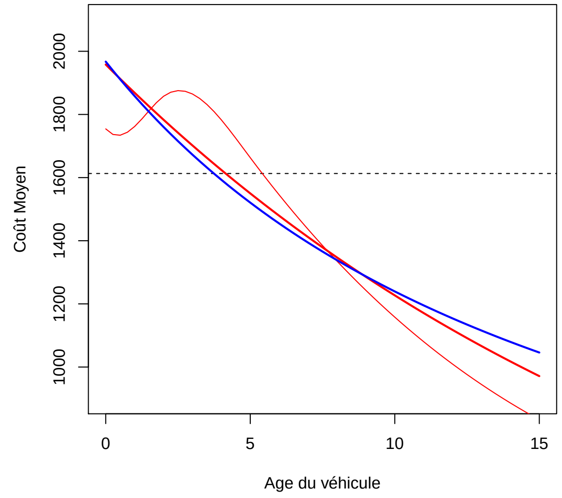
```
> library(splines)
> reggbs=glm(cout~bs(agevehicule)+carburant+
    zone,data=base_DO,family=Gamma(link="log")
    )
> yp=predict(regg,newdata=nd,type="response")
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
```



Les régressions Gamma

Régression Gamma, avec un lien inverse (lien canonique)

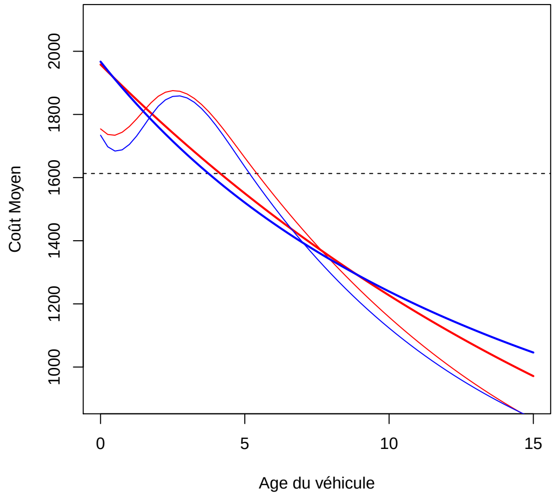
```
> regg=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,
    data=base_DO,family=Gamma)
> nd=data.frame(agevehicule=seq(0,15,by=.25),
    carburant="E",zone="A")
> yp=predict(regg,newdata=nd,type="response")
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
> abline(h=mean(base_DO$cout),lty=2)
```



Les régressions Gamma

Régression Gamma, avec un lien inverse, avec du lissage (splines)

```
> library(splines)
> reggbs=glm(cout~bs(agevehicule)+carburant+
    zone,data=base_DO,family=Gamma)
> yp=predict(regg,newdata=nd,type="response")
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
```



Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression inverse-Gaussienne, (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}]$),

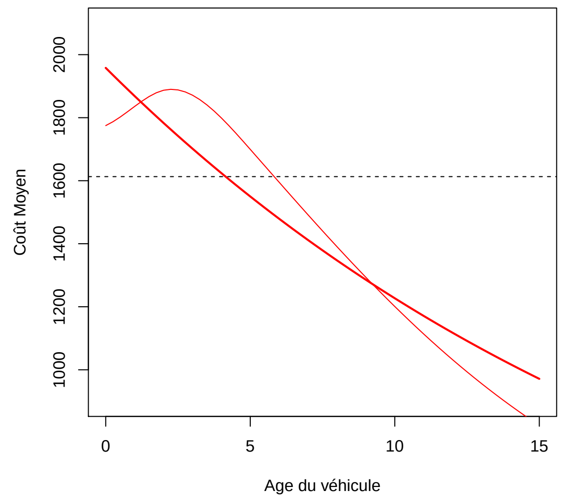
```
> regig=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=base_DO,
+       family=inverse.gaussian(link="log"),start=coefficients(regg))
> summary(regig)
Coefficients:
(Intercept)  7.731661   0.093390  82.789  < 2e-16 ***
agevehicule -0.046699   0.007016  -6.656 3.76e-11 ***
carburantE  -0.153028   0.061479  -2.489  0.01290 *
zoneB       -0.138902   0.123192  -1.128  0.25968
zoneC       -0.054040   0.098951  -0.546  0.58505
zoneD       -0.102103   0.102734  -0.994  0.32043
zoneE       -0.127266   0.103662  -1.228  0.21973
zoneF       -0.492622   0.155715  -3.164  0.00159 **

(Dispersion parameter for inverse.gaussian family taken to be
    0.001024064)
```

La régression Inverse Gaussienne

Régression Inverse Gaussienne, avec un lien logarithmique

```
> regig=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,
    data=base_DO,family=inverse.gaussian(link=
    "log"),start=coefficients(regg))
> yp=predict(regig,newdata=nd,type="response")
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
> abline(h=mean(base_DO$cout),lty=2)
```



Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression log-normale i.e. $\mathbb{E}(\log Y|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}$, on a

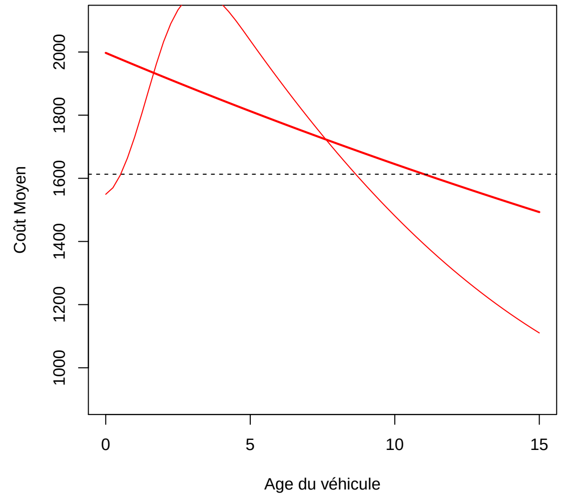
```
> regln=lm(log(cout)~agevehicule+carburant+zone,data=base_DO)
> summary(regln)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.776664   0.094371  71.809   <2e-16 ***
agevehicule -0.019397   0.008676  -2.236   0.0255 *
carburantE  -0.045508   0.064224  -0.709   0.4787
zoneB       -0.022196   0.128763  -0.172   0.8632
zoneC        0.056457   0.100695   0.561   0.5751
zoneD       -0.008894   0.105694  -0.084   0.9330
zoneE        0.017727   0.106321   0.167   0.8676
zoneF       -0.363002   0.184087  -1.972   0.0488 *

Residual standard error: 1.318 on 1727 degrees of freedom
> sigma=summary(regln)$sigma
```

La régression Log Normale

Régression Inverse Gaussienne, avec un lien logarithmique

```
> yp=exp(predict(regln,newdata=nd)+.5*sigma^2)
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red",
    lwd=2)
> abline(h=mean(base_DO$cout),lty=2)
```



Complément sur la régression Log Normale

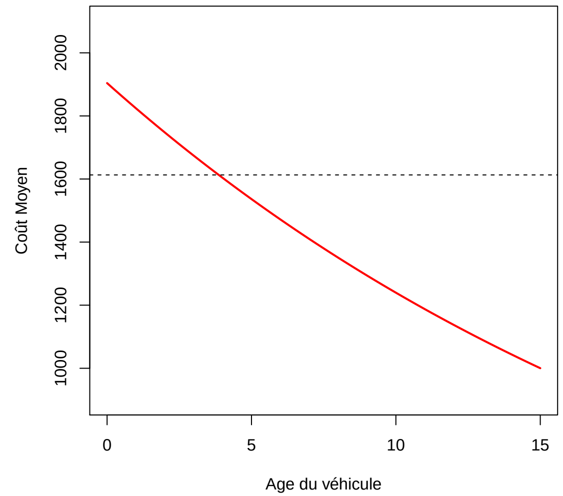
Pour la régression log-normale on peut utiliser

```
> library(gamlss)
> regln=gamlss(cout~agevehicule+carburant+zone,data=base_DO,family=
    LOGNO(mu.link="identity"))
> summary(regln)
```

```
------------------------------------------------------------------
Mu link function:  identity
Mu Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.776664   0.094153  71.975   <2e-16 ***
agevehicule -0.019397   0.008656  -2.241   0.0252 *
carburantE  -0.045508   0.064076  -0.710   0.4777
zoneB       -0.022196   0.128466  -0.173   0.8628
zoneC        0.056457   0.100463   0.562   0.5742
zoneD       -0.008894   0.105450  -0.084   0.9328
zoneE        0.017727   0.106076   0.167   0.8673
zoneF       -0.363002   0.183662  -1.976   0.0483 *
------------------------------------------------------------------
Sigma link function:  log
Sigma Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.27370    0.01698   16.12   <2e-16 ***
```

Régression Log Normale

```
> library(gamlss)
> yp=exp(predict(regln,what="mu",newdata=nd)
    +.5*(exp(regln$sigma.coefficients))^2)
> plot(seq(0,15,by=.25),yp,type="l",col="red
    ",lwd=2)
> abline(h=mean(base_DO$cout),lty=2)
```

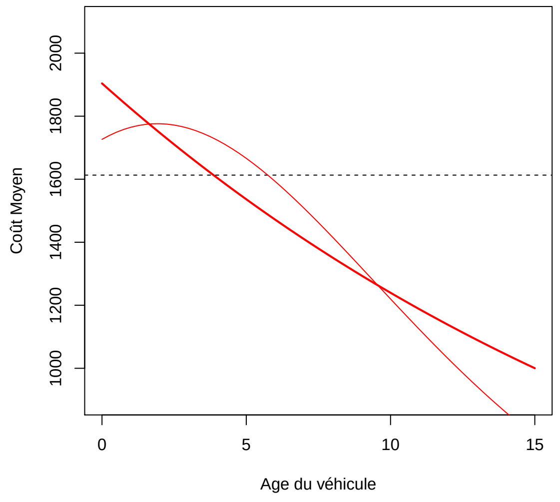


Au delà des lois de la famille exponentielle

Par exemple une loi de Weibull,

$$f(y_i|\mu_i,\sigma_i) = \frac{\sigma_i y^{\sigma_i - 1}}{\mu_i^{\sigma_i}} \cdot \exp[-(y/\mu_i)^{\sigma_i}] \text{ avec } \begin{cases} \mu_i = \exp[\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\alpha}] \\ \sigma_i = \exp[\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}] \end{cases}$$

```
> regweib=gamlss(cout~agevehicule+carburant+
    zone,data=base_DO,family=WEI(mu.link="
    log",sigma.link="log"))
> mu=exp(predict(regweib,what="mu",newdata=
    nd))
> sigma=exp(predict(regweib,what="sigma",
    newdata=nd))
>yp=mu*gamma((1/sigma)+1)
```



Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression Gamma (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\beta]$), on a

```
> regg=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=base_RC,
+        family=Gamma(link="log"))
> summary(regg)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.17615    0.22937  35.646   <2e-16 ***
agevehicule -0.01715    0.01360  -1.261   0.2073
carburantE  -0.20756    0.14725  -1.410   0.1588
zoneB       -0.60169    0.30708  -1.959   0.0502 .
zoneC       -0.60072    0.24201  -2.482   0.0131 *
zoneD       -0.45611    0.24744  -1.843   0.0654 .
zoneE       -0.43725    0.24801  -1.763   0.0781 .
zoneF        0.24778    0.44852   0.552   0.5807

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 9.91334)
```

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression inverse-Gaussienne, (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\beta]$),

```
> regig=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=base_RC,
+       family=inverse.gaussian(link="log"),start=coefficients(regg))
> summary(regig)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.07065    0.23606  34.188   <2e-16 ***
agevehicule -0.01509    0.01118  -1.349   0.1774
carburantE  -0.18037    0.13065  -1.381   0.1676
zoneB       -0.50202    0.28836  -1.741   0.0819 .
zoneC       -0.50913    0.24098  -2.113   0.0348 *
zoneD       -0.38080    0.24806  -1.535   0.1249
zoneE       -0.36541    0.24975  -1.463   0.1436
zoneF        0.42854    0.56537   0.758   0.4486

(Dispersion parameter for inverse.gaussian family taken to be
    0.004331898)
```

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression log-normale i.e. $\mathbb{E}(\log Y|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}$, on a

```
> regln=lm(log(cout)~agevehicule+carburant+zone,data=base_RC)
> summary(regln)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.876142   0.086483  79.508   <2e-16 ***
agevehicule -0.007032   0.005127  -1.372    0.170
carburantE  -0.042338   0.055520  -0.763    0.446
zoneB        0.080288   0.115784   0.693    0.488
zoneC        0.015060   0.091250   0.165    0.869
zoneD        0.099338   0.093295   1.065    0.287
zoneE        0.004305   0.093512   0.046    0.963
zoneF       -0.101866   0.169111  -0.602    0.547
```

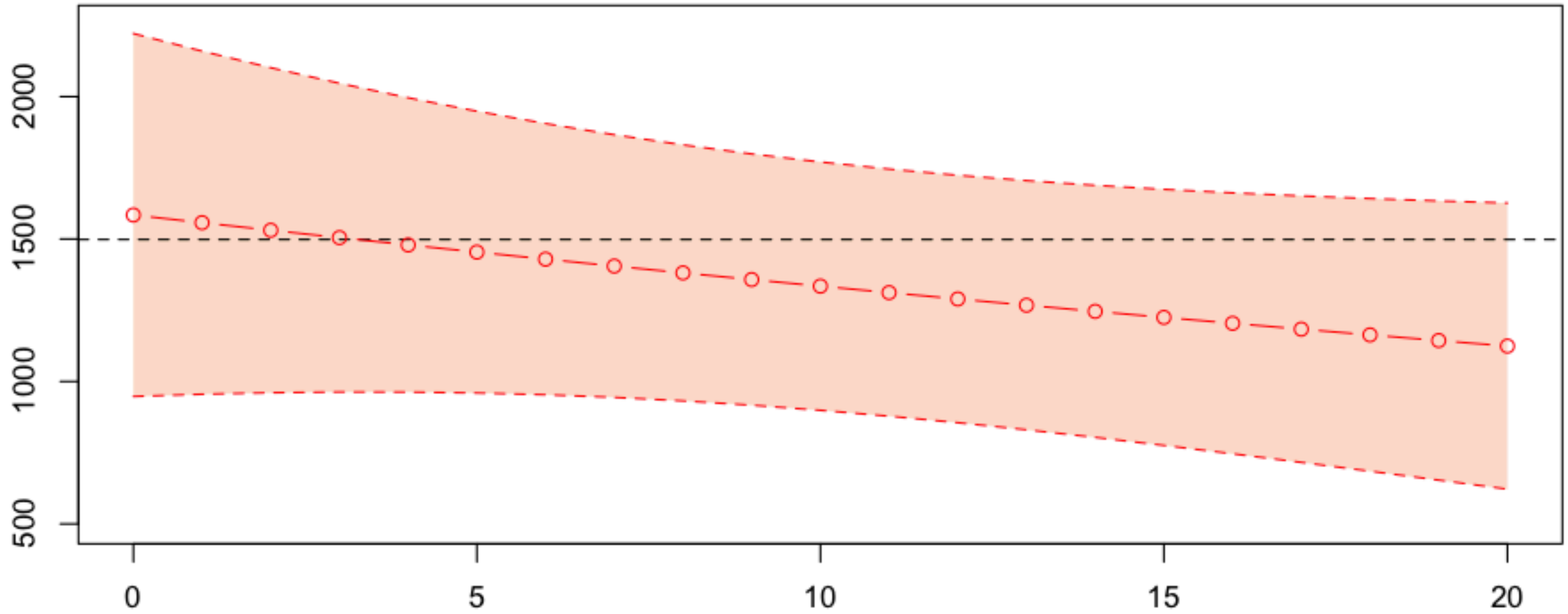
Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

On peut comparer les prédictions (éventuellement en fixant quelques covariables),

```
> nouveau=data.frame(agevehicule=0:20,carburant="E",zone="C")
> s=summary(regln)$sigma
> predln=predict(regln,se.fit=TRUE,newdata=nouveau)
> predg=predict(regg,se.fit=TRUE,type="response",newdata=nouveau)
> predig=predict(regig,se.fit=TRUE,type="response",newdata=nouveau)
```

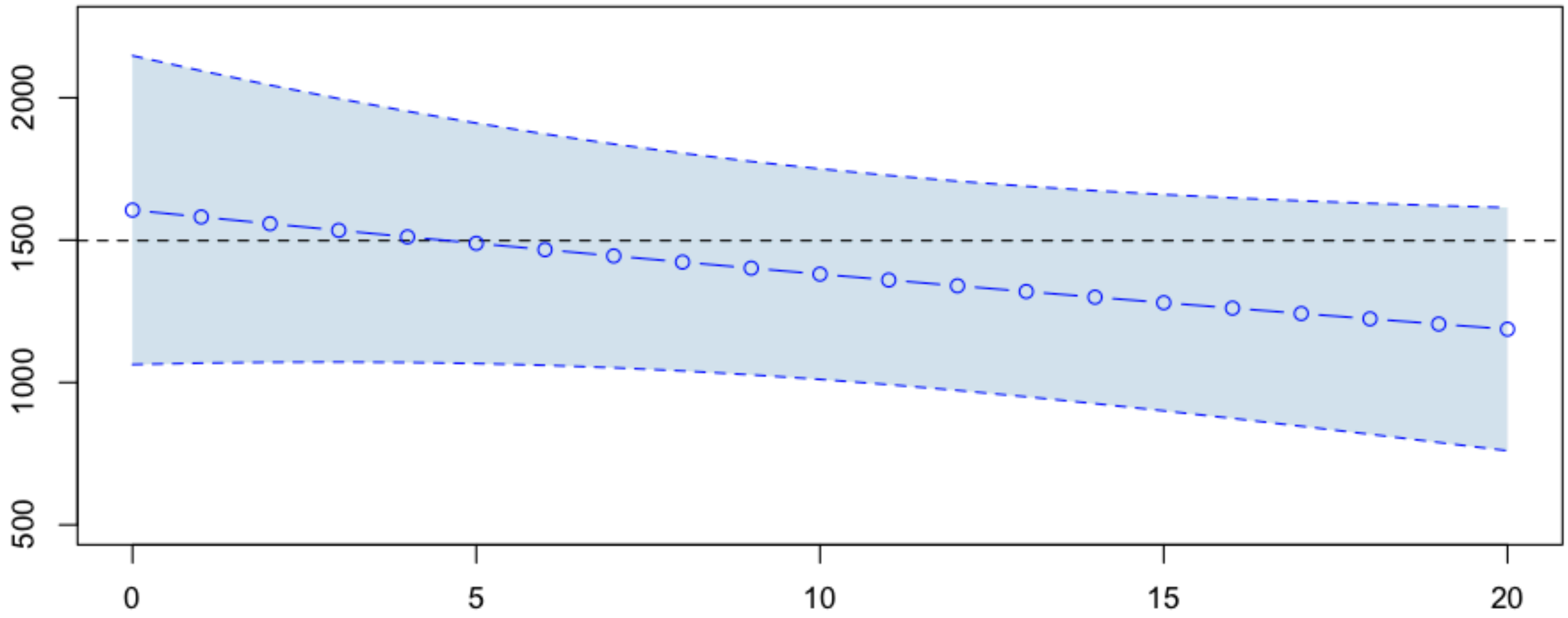
Pour le modèle log-Gamma, on a

```
> plot(0:20,predg$fit,type="b",col="red")
> lines(0:20,predg$fit+2*predg$se.fit,lty=2,col="red")
> lines(0:20,predg$fit-2*predg$se.fit,lty=2,col="red")
```



Pour le modèle log-inverse Gaussienne, on a

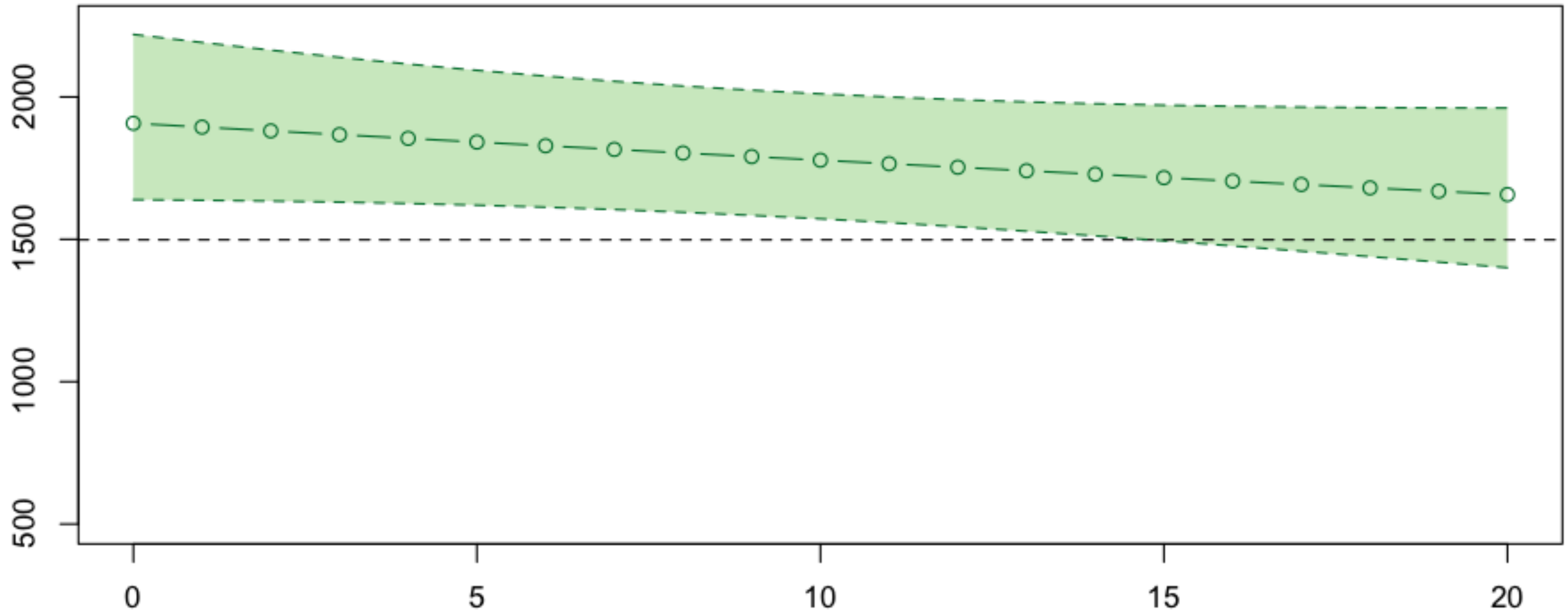
```
> plot(0:20,predig$fit,type="b",col="blue")
> lines(0:20,predig$fit+2*predg$se.fit,lty=2,col="blue")
> lines(0:20,predig$fit-2*predg$se.fit,lty=2,col="blue")
```



Pour le modèle lognormal, on a

```
> plot(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2),type="b",col="green")
> lines(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2+2*predln$se.fit),lty=2,col="green"
    )
> lines(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2-2*predln$se.fit),lty=2,col="green"
    )
```

(les intervalles de confiance sur $\widehat{Y}$ n'ont pas trop de sens ici...)



Prise en compte des gros sinistres

On a ici quelques *gros* sinistres. L'idée est de noter que

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_i \mathbb{E}(Y|\Theta=\theta_i)\cdot\mathbb{P}(\Theta=\theta_i)$$

Supposons que Θ prenne deux valeurs, correspondant au cas $\{Y\leq s\}$ et $\{Y>s\}$. Alors

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(Y|Y\leq s)\cdot\mathbb{P}(Y\leq s)+\mathbb{E}(Y|Y>s)\cdot\mathbb{P}(Y>s)$$

ou, en calculant l'espérance sous $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ et plus $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X})=\underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X},Y\leq s)}_{A}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y\leq s|\boldsymbol{X})}_{B}+\underbrace{\mathbb{E}(Y|Y>s,\boldsymbol{X})}_{C}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y>s|\boldsymbol{X})}_{B}$$

Prise en compte des gros sinistres

Trois termes apparaissent dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s)}_{A} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X})}_{B} + \underbrace{\mathbb{E}(Y|Y > s, \boldsymbol{X})}_{C} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})}_{B}$$

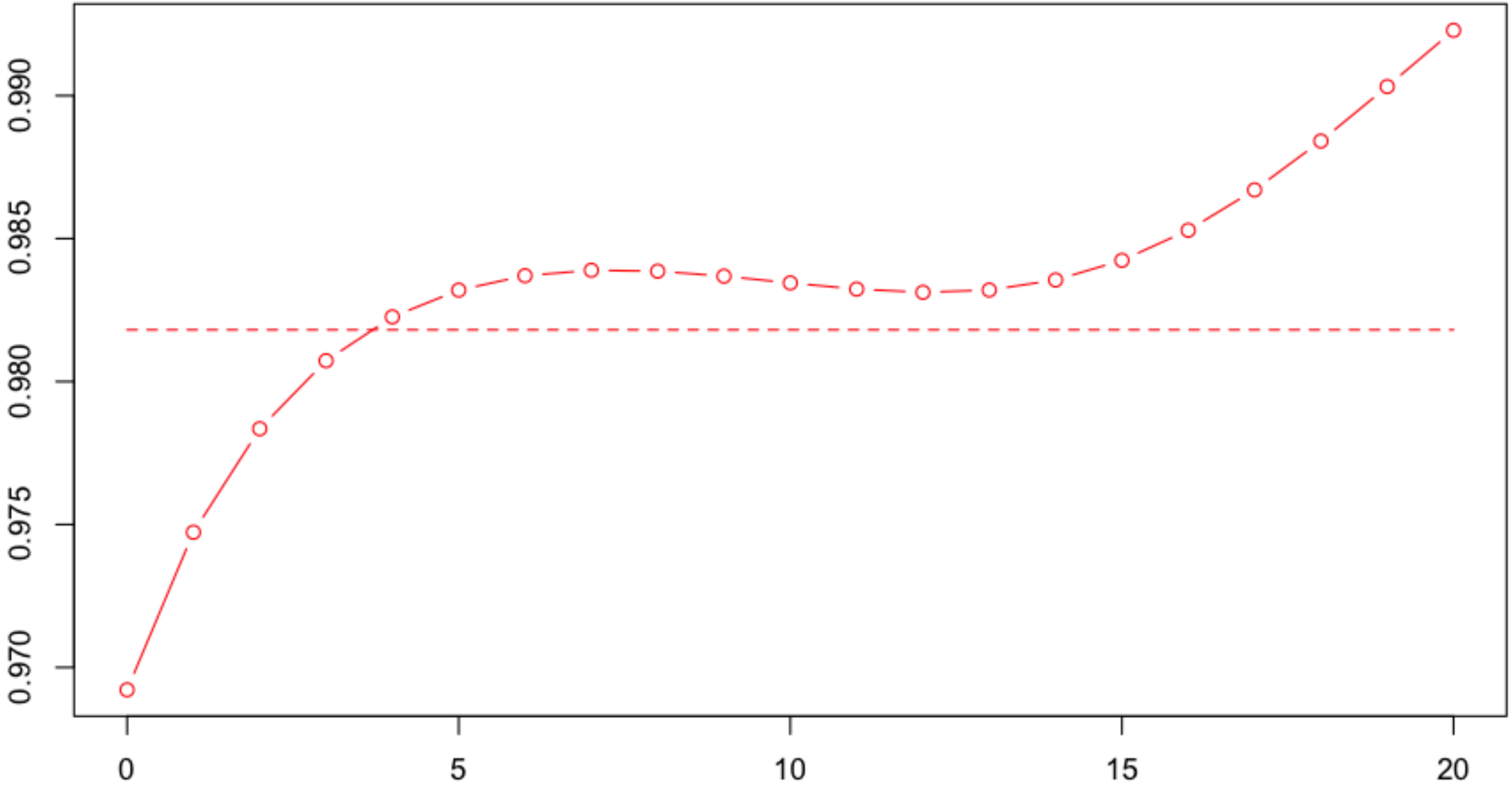
- le coût moyen des sinistres normaux, A
- la probabilité d'avoir un gros, ou un sinistre normal, si un sinistre survient, B
- le coût moyen des sinistres importants, C

Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme B, il s'agit d'une régression *standard* d'une variable de Bernoulli,

```
> s = 10000
> base_RC$normal=(base_RC$cout<=s)
> mean(base_RC$normal)
[1] 0.9818087
> library(splines)
> age=seq(0,20)
> regC=glm(normal~bs(agevehicule),data=base_RC,family=binomial)
> ypC=predict(regC,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response
   ")
> plot(age,ypC,type="b",col="red")
> regC2=glm(normal~1,data=base_RC,family=binomial)
> ypC2=predict(regC2,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="
   response")
> lines(age,ypC2,type="l",col="red",lty=2)
```

Prise en compte des gros sinistres

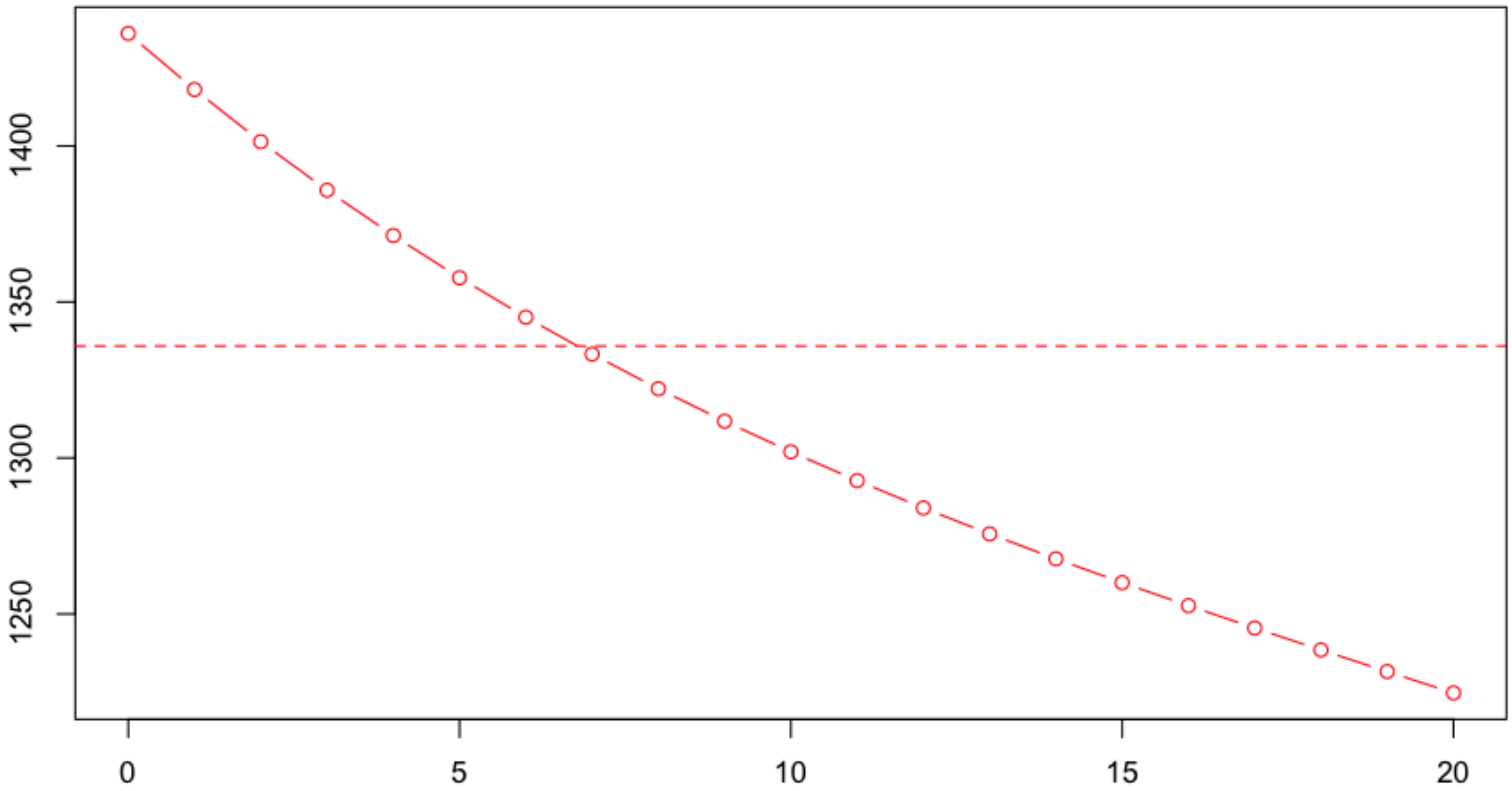


Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme A, il s'agit d'une régression *standard* sur la base restreinte,

```
> indice = which(base_RC$cout<=s)
> mean(base_RC$cout[indice])
[1] 1335.878
> library(splines)
> regA=glm(cout~bs(agevehicule),data=base_RC,
+ subset=indice,family=Gamma(link="log"))
> ypA=predict(regA,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response
    ")
> plot(age,ypA,type="b",col="red")
> ypA2=mean(base_RC$cout[indice])
> abline(h=ypA2,lty=2,col="red")
```

Prise en compte des gros sinistres

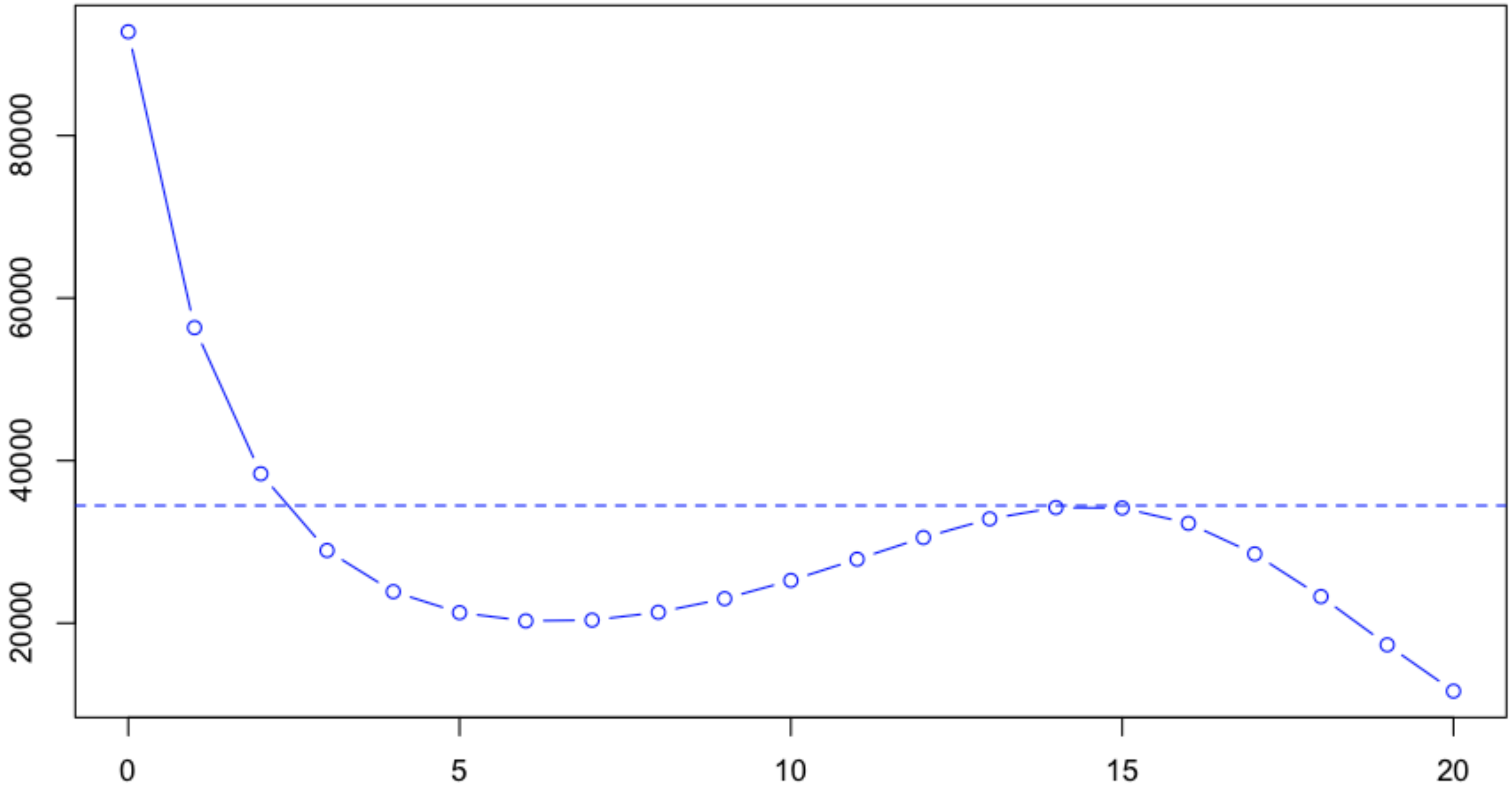


Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme C, il s'agit d'une régression *standard* sur la base restreinte,

```
> indice = which(base_RC$cout>s)
> mean(base_RC$cout[indice])
[1] 34471.59
>  regB=glm(cout~bs(agevehicule),data=base_RC,
+  subset=indice,family=Gamma(link="log"))
>  ypB=predict(regB,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="
   response")
>  plot(age,ypB,type="b",col="blue")
>  ypB=predict(regB,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="
   response")
>  ypB2=mean(base_RC$cout[indice])
> plot(age,ypB,type="b",col="blue")
> abline(h=ypB2,lty=2,col="blue")
```

Prise en compte des gros sinistres

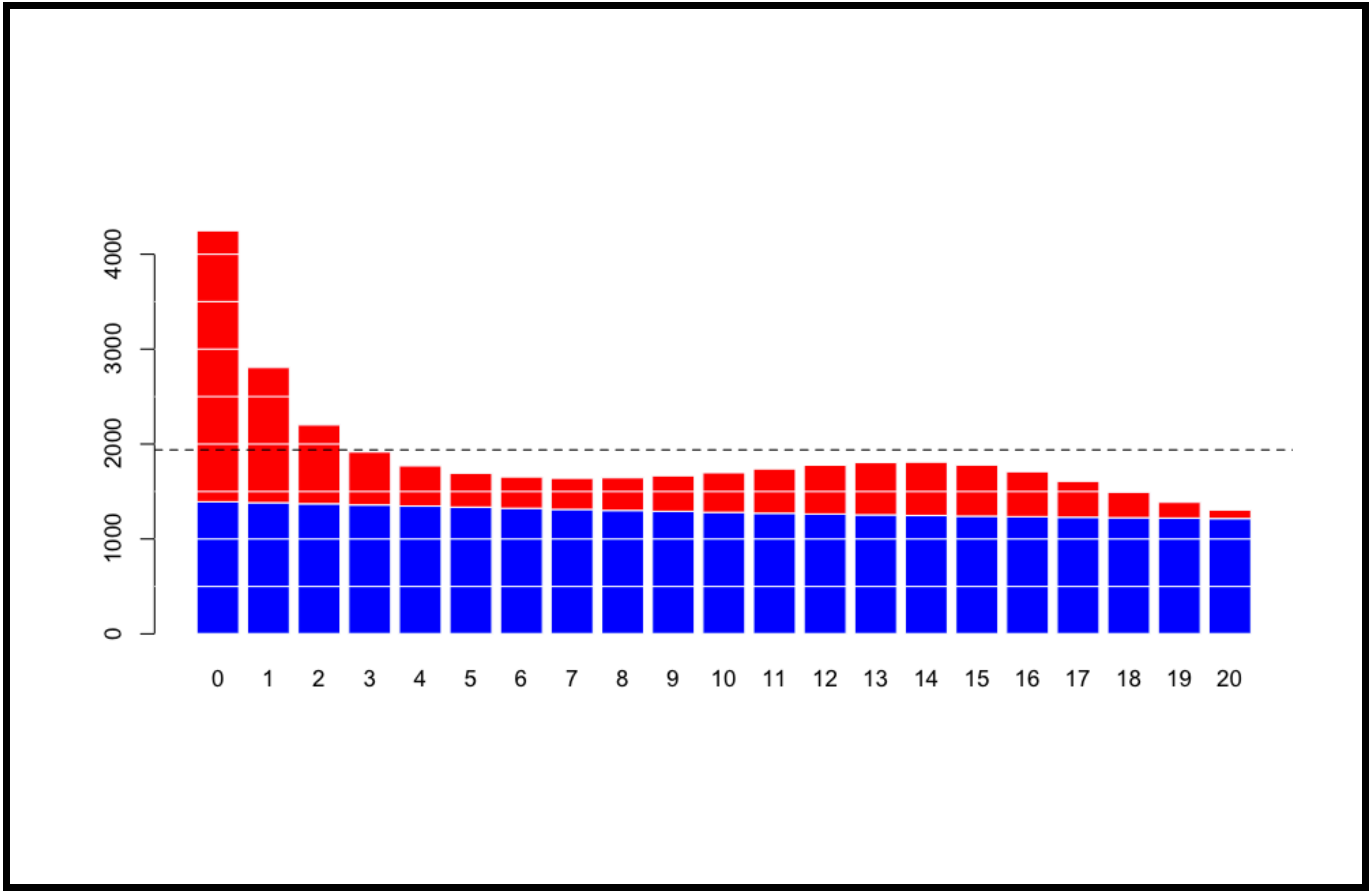


Prise en compte des gros sinistres

Reste à combiner les modèles, e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(Y|Y > s, \boldsymbol{X}) \cdot \mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})$$

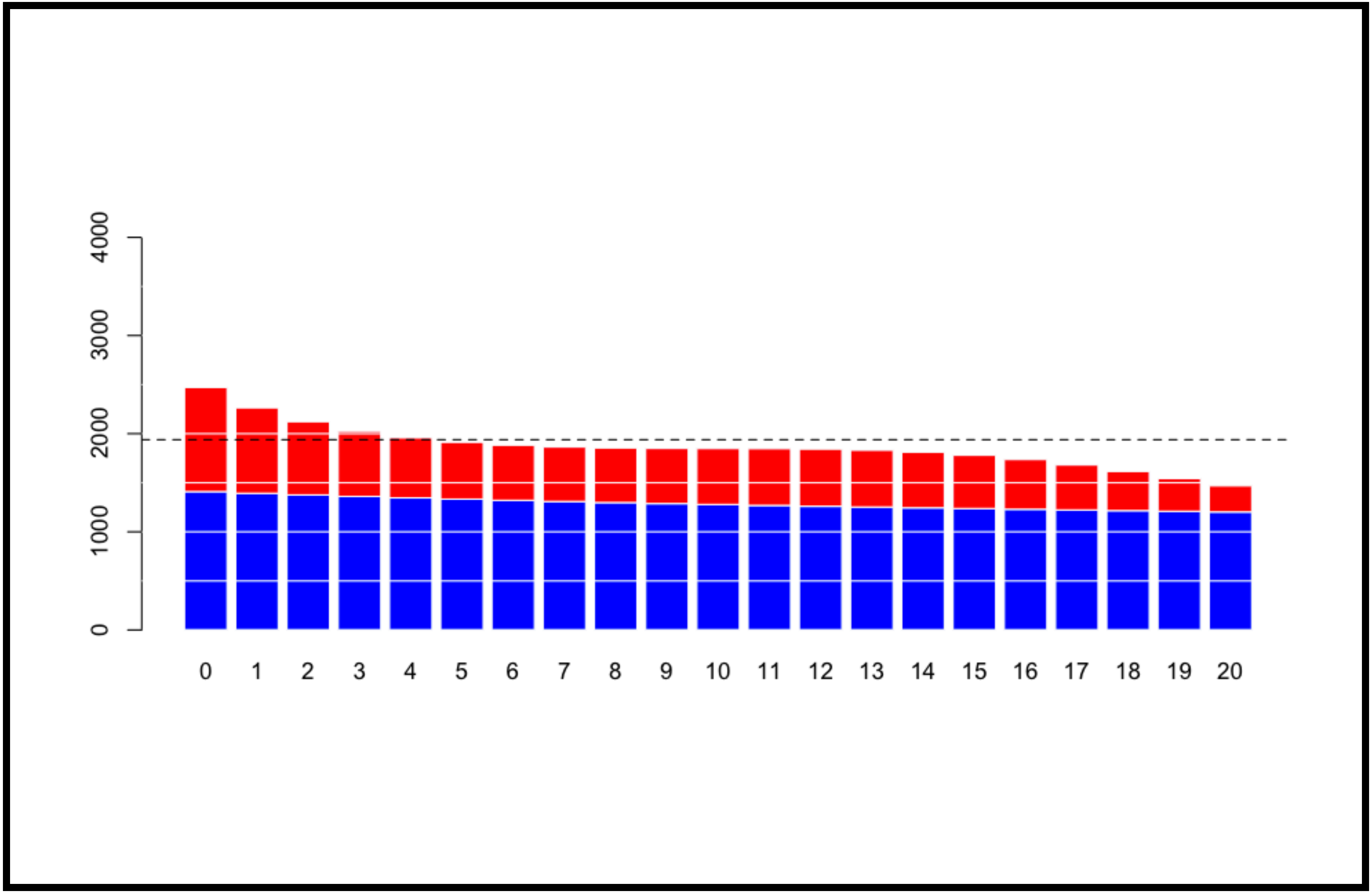
```
> indice = which(base_RC$cout>s)
> mean(base_RC$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime = ypA*ypC + ypB*(1-ypC))
```


0
1000
2000
3000
4000
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

ou, e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad\quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})$$

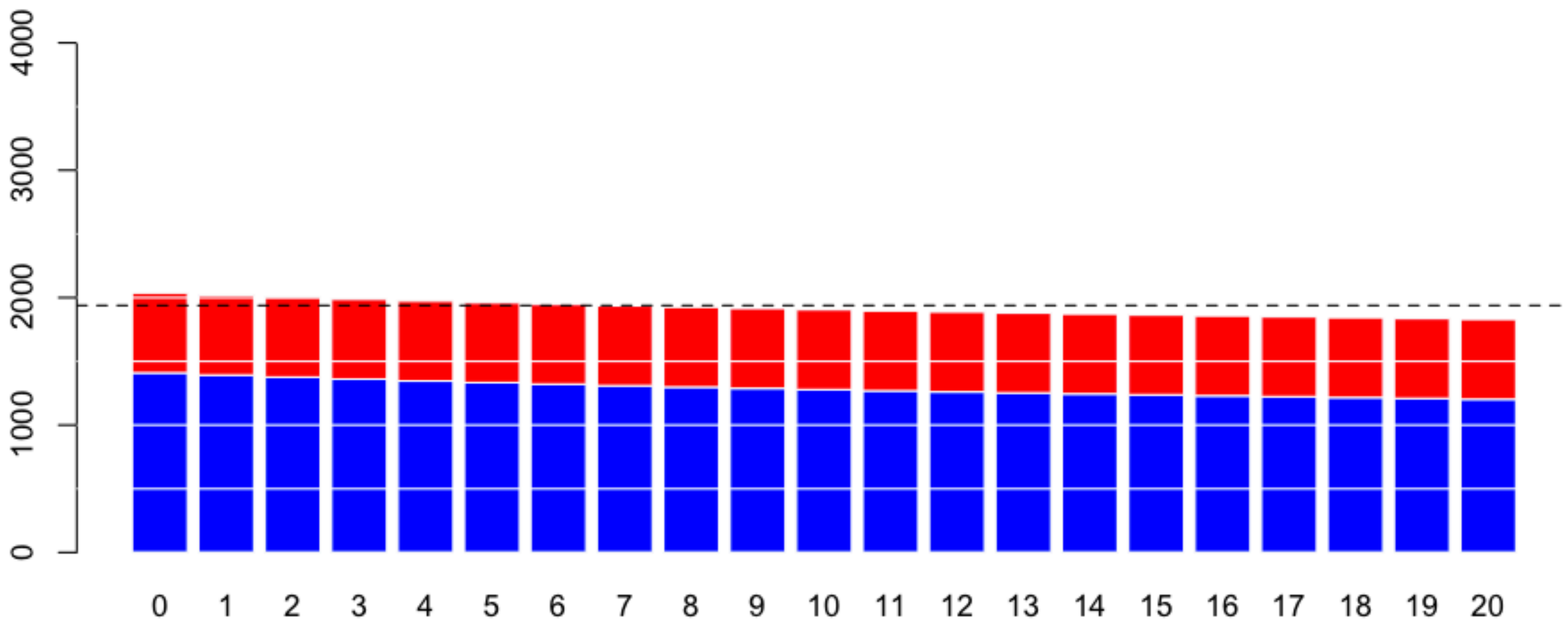
```
> indice = which(base_RC$cout>s)
> mean(base_RC$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime =  ypA*ypC + ypB2*(1-ypC))
```


0
1000
2000
3000
4000
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

voire e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

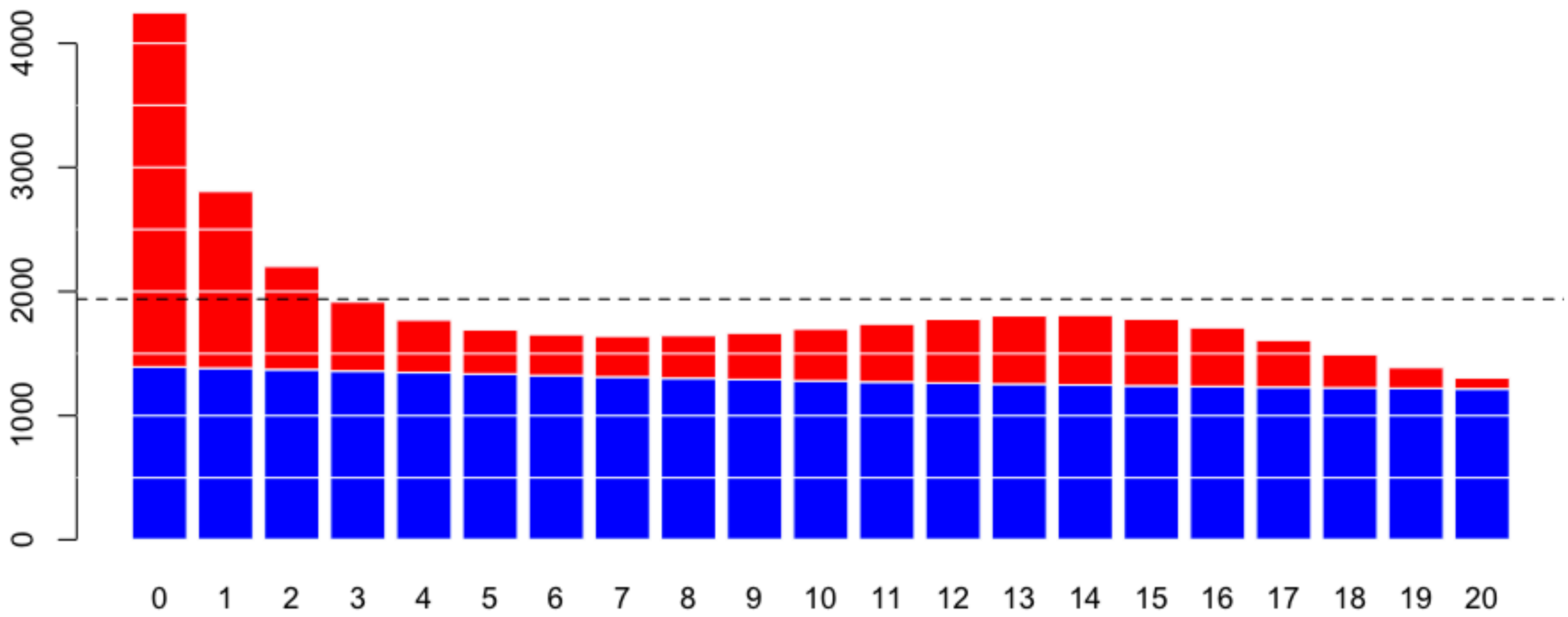
```
> indice = which(base_RC$cout>s)
> mean(base_RC$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime =  ypA*ypC + ypB2*(1-ypC))
```


0
1000
2000
3000
4000
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Mais on peut aussi changer le seuil s dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \qquad \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

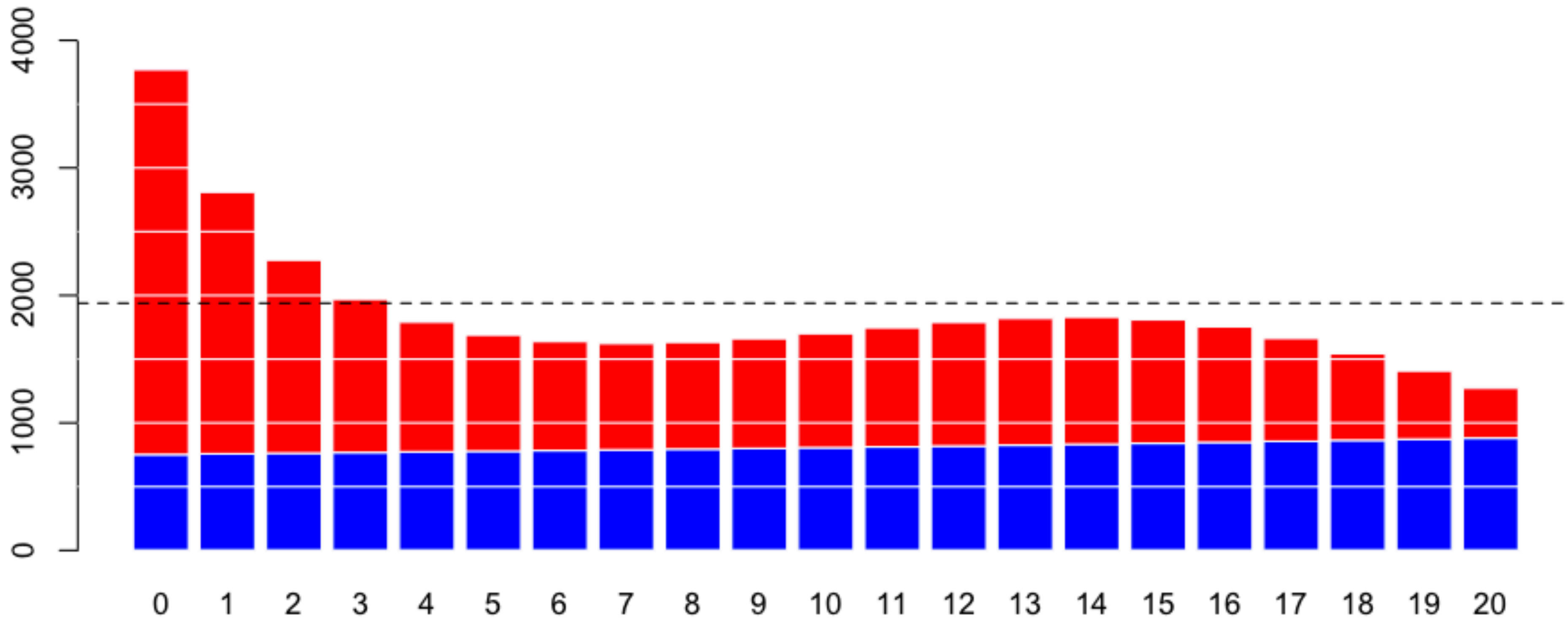
e.g. avec $s = 10,000$€,



Mais on peut aussi changer le seuil s dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \qquad \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

e.g. avec $s = 25,000$€,



Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

Il est classique de supposer que la loi de Y (coût individuel de sinistres) est un mélange de plusieurs lois,

$$f(y) = \sum_{k=1}^{K} p_k f_k(y), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

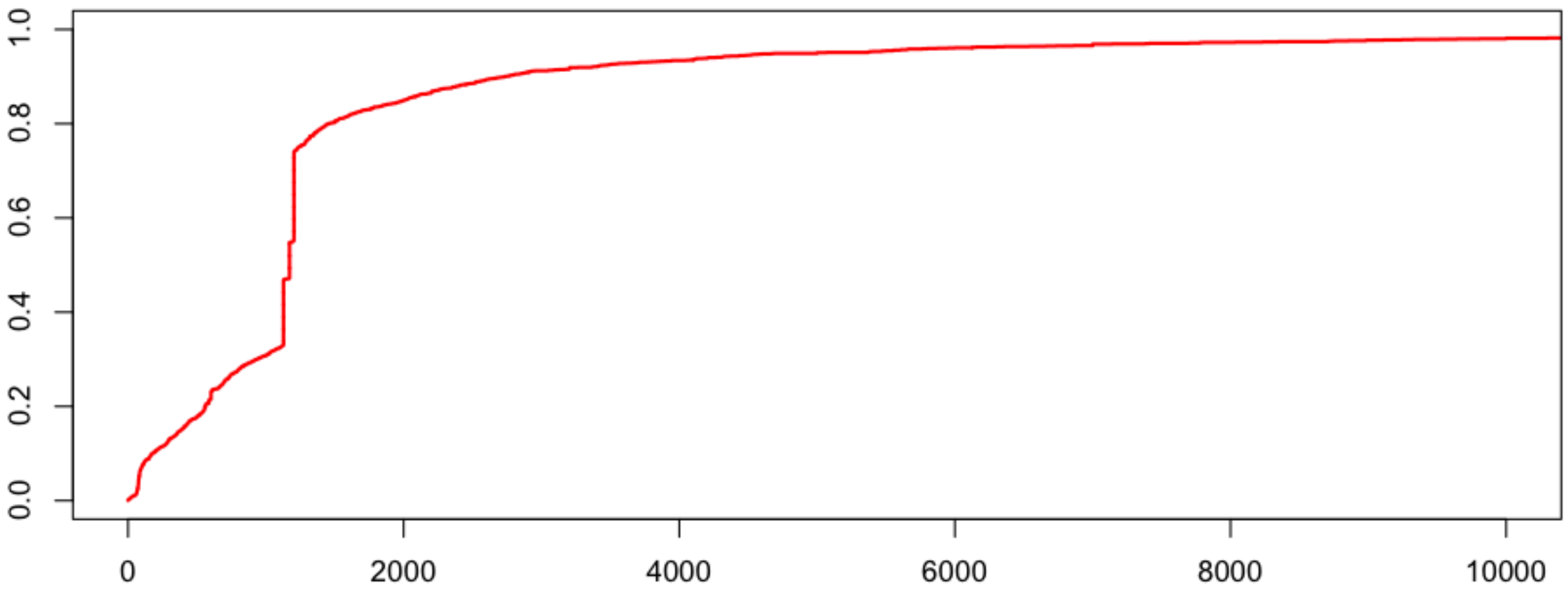
où f_k est une loi sur $\mathbb{R}_+$ et $\boldsymbol{p} = (p_k)$ un vecteur de probabilités. Ou, en terme de fonctions de répartition,

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \sum_{k=1}^{K} p_k F_k(y), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

où F_k est la fonction de répartition d'une variable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

```
> n=nrow(couts)
> plot(sort(base_RC$cout),(1:n)/(n+1),xlim=c(0,10000),type="s",lwd=2,
    col="red")
```



Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

On peut considérer un mélange de trois lois,

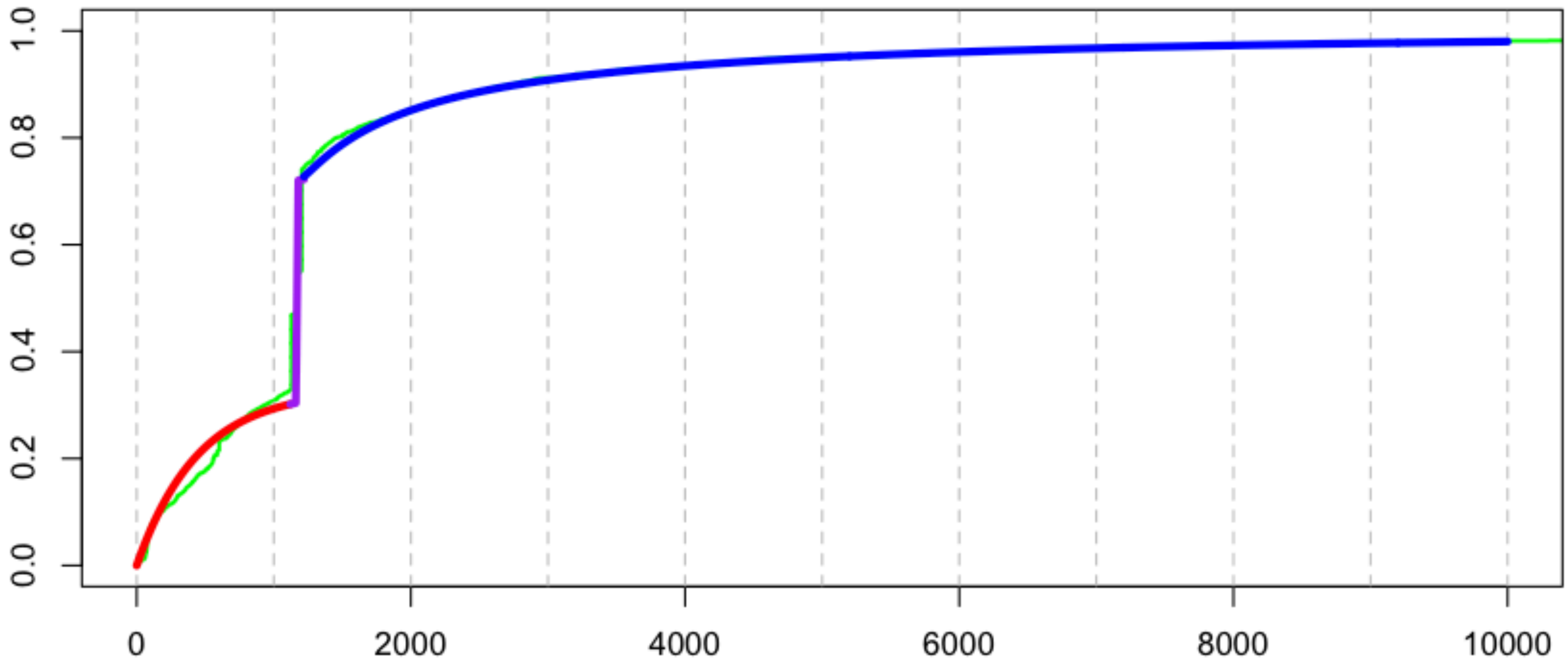
$$f(y) = p_1 f_1(x) + p_2 \delta_\kappa(x) + p_3 f_3(x), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

avec

- une loi exponentielle pour f_1
- une masse de Dirac en κ (i.e. un coût fixe) pour f_2
- une loi lognormale (décallée) pour f_3

```
>  I1=which(base_RC$cout<1120)
>  I2=which((base_RC$cout>=1120)&(base_RC$cout<1220))
>  I3=which(base_RC$cout>=1220)
>  (p1=length(I1)/nrow(couts))
[1] 0.3284823
>  (p2=length(I2)/nrow(couts))
```

```
[1] 0.4152807
>  (p3=length(I3)/nrow(couts))
[1] 0.256237
>  X=base_RC$cout
>  (kappa=mean(X[I2]))
[1] 1171.998
>  X0=X[I3]-kappa
>  u=seq(0,10000,by=20)
>  F1=pexp(u,1/mean(X[I1]))
>  F2= (u>kappa)
>  F3=plnorm(u-kappa,mean(log(X0)),sd(log(X0))) * (u>kappa)
>  F=F1*p1+F2*p2+F3*p3
>  lines(u,F,col="blue")
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Prise en compte des coûts fixes en tarification

Comme pour les gros sinistres, on peut utiliser ce découpage pour calculer $\mathbb{E}(Y)$, ou $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X})$. Ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) &= \underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X},Y\leq s_1)}_{A}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y\leq s_1|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_1(\boldsymbol{X})}\\ &\quad+\underbrace{\mathbb{E}(Y|Y\in(s_1,s_2],\boldsymbol{X})}_{B}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y\in(s_1,s_2]|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_2(\boldsymbol{X})}\\ &\quad+\underbrace{\mathbb{E}(Y|Y>s_2,\boldsymbol{X})}_{C}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y>s_2|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_3(\boldsymbol{X})}\end{aligned}$$

Les paramètres du mélange, $(\pi_1(\boldsymbol{X}),\pi_2(\boldsymbol{X}),\pi_3(\boldsymbol{X}))$ peuvent être associés à une loi multinomiale de dimension 3.

Loi multinomiale

Rappelons que pour la régression logistique, si $(\pi, 1-\pi) = (\pi_1, \pi_2)$

$$\log \frac{\pi}{1-\pi} = \log \frac{\pi_1}{\pi_2} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta},$$

ou encore

$$\pi_1 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})} \text{ et } \pi_2 = \frac{1}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})}$$

On peut définir une régression logistique multinomiale, de paramètre $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ en posant

$$\log \frac{\pi_1}{\pi_3} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1 \text{ et } \log \frac{\pi_2}{\pi_3} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2$$

Loi multinomiale

ou encore

$$\pi_1 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}, \pi_2 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}$$

et $\pi_3 = \dfrac{1}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}$.

Remarque l'estimation se fait - là encore - en calculant numériquement le maximum de vraisemblance, en notant que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{y}) \propto \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{3} \pi_{i,j}^{Y_{i,j}}$$

où Y_i est ici disjonctée en $(Y_{i,1},Y_{i,2},Y_{i,3})$ contenant les variables indicatrices de chacune des modalités. La log-vraisemblance est alors proportionnelle à

$$\log\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y}) \propto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\left(Y_{i,j}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta}_j\right) - n_i \log\left[1+1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)\right]$$

Loi multinomiale (et GLM)

qui se résout avec un algorithme de type Newton-Raphson, en notant que

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial \beta_{k,j}}=\sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}X_{i,k}-n_i\pi_{i,j}X_{i,k}$$

i.e.

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})}{\partial \beta_{k,j}}=\sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}X_{i,k}-n_i\frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_j)}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}X_{i,k}$$

Loi multinomiale

Sous R, la fonction `multinom` de `library(nnet)` permet de faire cette estimation. On commence par définir les trois tranches de coûts,

```
> seuils=c(0,1120,1220,1e+12)
> base_RC$tranches=cut(base_RC$cout,breaks=seuils,
+ labels=c("small","fixed","large"))
> head(couts,5)
  nocontrat    no  garantie    cout  exposit  zone  puissance  agevehicule
1      1870  17219       1RC  1692.29     0.11     C          5            0
2      1963  16336       1RC   422.05     0.10     E          9            0
3      4263  17089       1RC   549.21     0.65     C         10            7
4      5181  17801       1RC   191.15     0.57     D          5            2
5      6375  17485       1RC  2031.77     0.47     B          7            4
  ageconducteur  bonus  marque  carbur  densite  region  tranches
1            52     50      12       E       73      13     large
2            78     50      12       E       72      13     small
3            27     76      12       D       52       5     small
4            26    100      12       D       83       0     small
```

```
5                    46        50          6          E          11          13        large
```

Loi multinomiale

On peut ensuite faire une régression multinomiale afin d'expliquer π_i en fonction de covariables $\boldsymbol{X}_i$.

```
> reg=multinom(tranches~ageconducteur+agevehicule+zone+carburant,data
    =base_RC)
# weights:  30 (18 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2063.326526
iter  20 value 2059.206691
final  value 2059.134802
converged
```

```
> summary(reg)
Call:
multinom(formula = tranches ~ ageconducteur + agevehicule + zone +
    carburant, data = couts)

Coefficients:
      (Intercept) ageconducteur agevehicule      zoneB      zoneC
fixed  -0.2779176   0.012071029  0.01768260 0.05567183 -0.2126045
large  -0.7029836   0.008581459 -0.01426202 0.07608382  0.1007513
           zoneD      zoneE      zoneF   carburantE
fixed -0.1548064 -0.2000597 -0.8441011 -0.009224715
large  0.3434686  0.1803350 -0.1969320  0.039414682

Std. Errors:
      (Intercept) ageconducteur agevehicule     zoneB     zoneC
    zoneD
fixed   0.2371936   0.003738456  0.01013892 0.2259144 0.1776762
    0.1838344
```

```
large    0.2753840    0.004203217   0.01189342 0.2746457 0.2122819
    0.2151504
             zoneE      zoneF  carburantE
fixed 0.1830139 0.3377169   0.1106009
large 0.2160268 0.3624900   0.1243560
```

Loi multinomiale

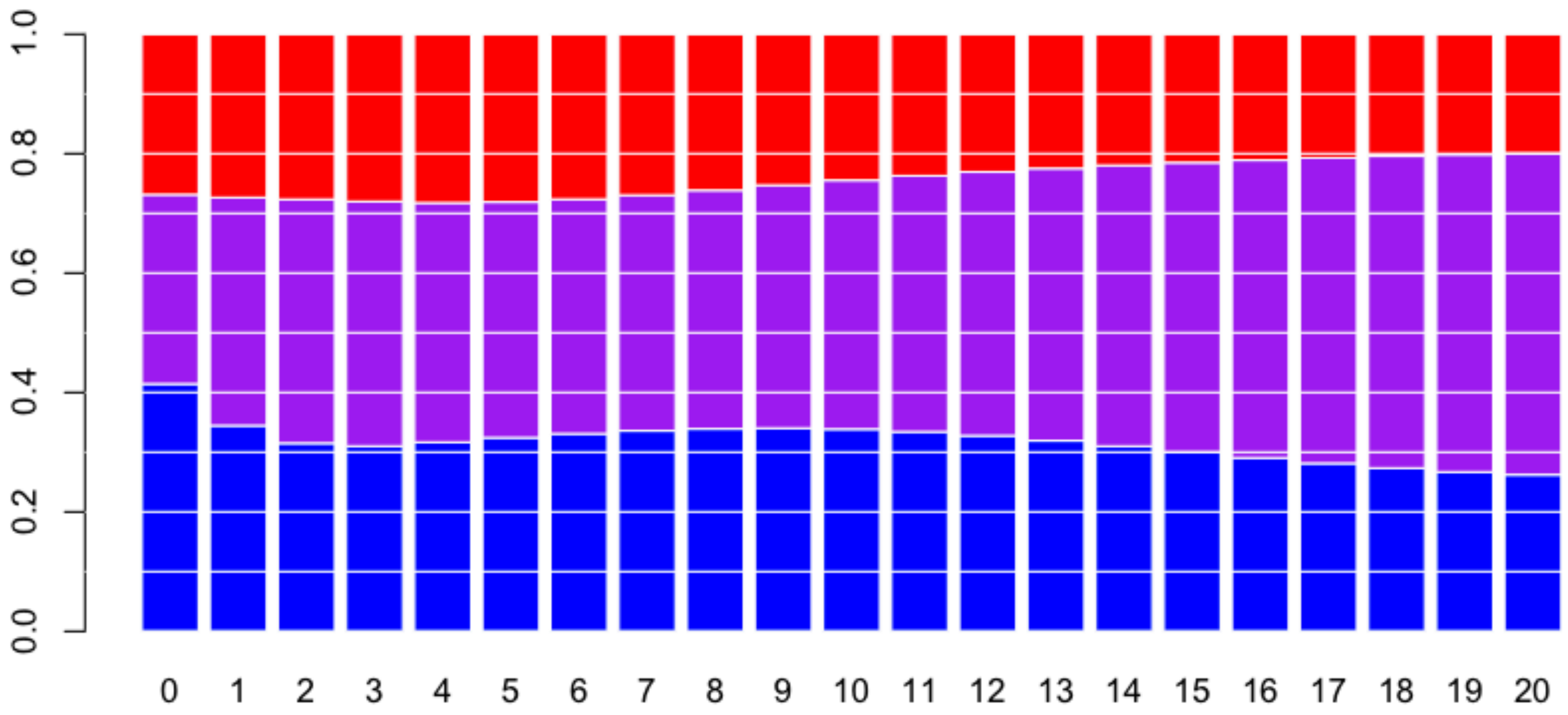
On peut régresser suivant l'ancienneté du véhicule, avec ou sans lissage,

```
> library(splines)
> reg=multinom(tranches~agevehicule,data=base_RC)
# weights:  9 (4 variable)
initial  value 2113.730043
final  value 2072.462863
converged
> reg=multinom(tranches~bs(agevehicule),data=base_RC)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2070.496939
iter  20 value 2069.787720
iter  30 value 2069.659958
final  value 2069.479535
converged
```

Loi multinomiale

On peut alors prédire la probabilité, sachant qu'un accident survient, qu'il soit de type 1, 2 ou 3

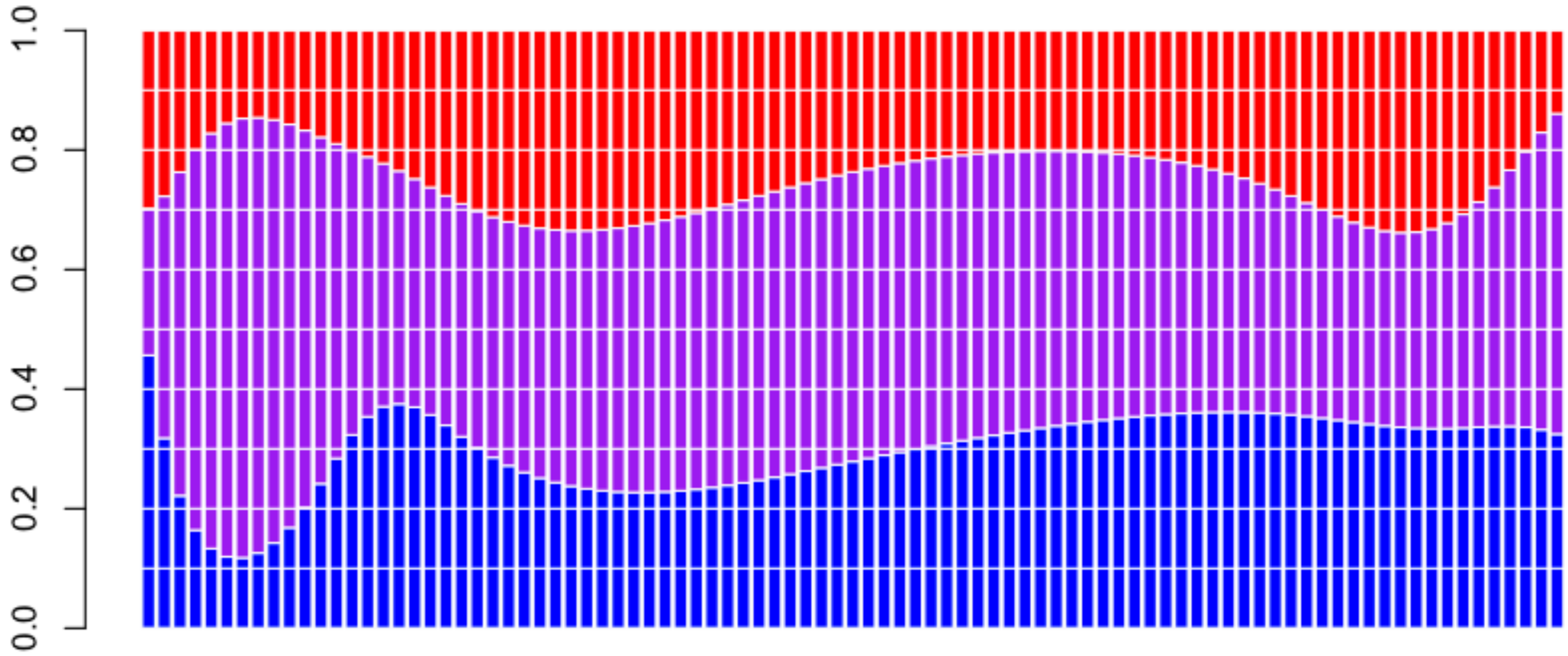
```
> predict(reg,newdata=data.frame(agevehicule=5),type="probs")
    small     fixed     large
0.3388947 0.3869228 0.2741825
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Loi multinomiale

ou en fonction de la densité de population

```
> reg=multinom(tranches~bs(densite),data=base_RC)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2068.469825
final  value 2068.466349
converged
> predict(reg,newdata=data.frame(densite=90),type="probs")
    small     fixed     large
0.3484422 0.3473315 0.3042263
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Loi multinomiale

Il faut ensuite ajuster des lois pour les trois régions A, B ou C

```
> reg=multinom(tranches~bs(densite),data=base_RC)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2068.469825
final  value 2068.466349
converged
> predict(reg,newdata=data.frame(densite=90),type="probs")
    small     fixed     large
0.3484422 0.3473315 0.3042263
```

Pour A, on peut tenter une loi exponentielle (qui est une loi Gamma avec $\phi = 1$).

```
> regA=glm(cout~agevehicule+densite+carburant,data=sousbaseA,
+ family=Gamma(link="log"))
> summary(regA, dispersion=1)

Coefficients:
```

```
                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   6.0600491  0.1005279  60.282   <2e-16 ***
agevehicule   0.0003965  0.0070390   0.056    0.955
densite       0.0014085  0.0013541   1.040    0.298
carburantE   -0.0751446  0.0806202  -0.932    0.351
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1)
```

Pour B, on va garder l'idée d'une masse de Dirac en

```
> mean(sousbaseB$cout)
[1] 1171.998
```

(qui semble correspondre à un coût fixe.

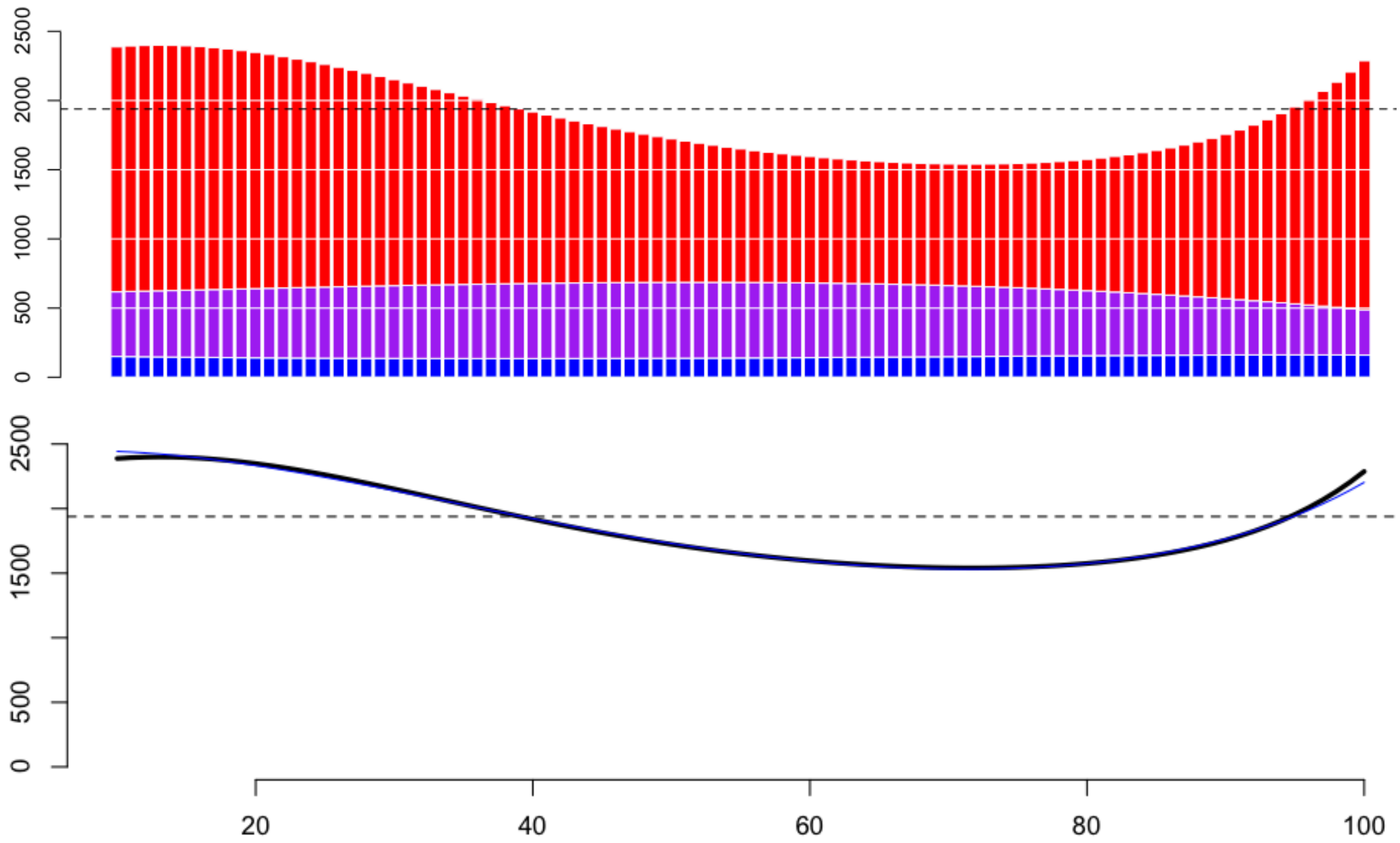
Enfin, pour C, on peut tenter une loi Gamma ou lognormale décallée,

```
> k=mean(sousbaseB$cout)
```

```
> regC=glm((cout-k)~agevehicule+densite+carburant,data=sousbaseC,
+ family=Gamma(link="log"))
> summary(regC)

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   9.119879   0.378836  24.073   <2e-16 ***
agevehicule  -0.013393   0.028620  -0.468   0.6400
densite      -0.010814   0.004831  -2.239   0.0256 *
carburantE   -0.530964   0.287450  -1.847   0.0653 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 10.00845)
```


0
500
1000
1500
2000
2500
0
500
1500
2500
20
40
60
80
100