EXAMEN INTRA (4/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse
- vous perdez 1 point par non réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Il y a 11 pages dans cet énoncé, merci de vérifier que le nombre de pages correspond, avant de débuter.

$\boxed{1}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Soit Y le variable aléatoire discrète, $Y = 1, 2, 3, ...$, définie par $Y =$ le plus petit entier plus grand que X (c'est-à-dire la partie entière de X plus 1). Trouver $P(Y = y) = p_y$.

A) $1 - e^{-y}$ B) $e^{-y}(e - 1)$ C) $e^{-y}(1 - e^{-1})$ D) e^{-y} E) e^{-y+1}

On retrouve ici une propriété évoquée en cours sur la loi exponentielle, et la loi géométrique. On fait attention au fait que l'on travaille sur la partie entière **+1** Si on ne s'en souvient pas on va le retrouver. Soit $y \in \mathbb{N}_\star$ (oui, on exclue 0),

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(y - 1 \leq X < y) = \mathbb{P}(y - 1 < X \leq y)$$

par continuité de X soit

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X \leq y)-) - \mathbb{P}(X \leq y - 1) = F(y) - F(y - 1)$$

soit

$$\mathbb{P}(Y = y) = [1-\exp(-[y])]-[1-\exp(-[y-1])] = -\exp(-y+1)+\exp(-y) = \exp(-y)\cdot(\exp(1)-1)$$

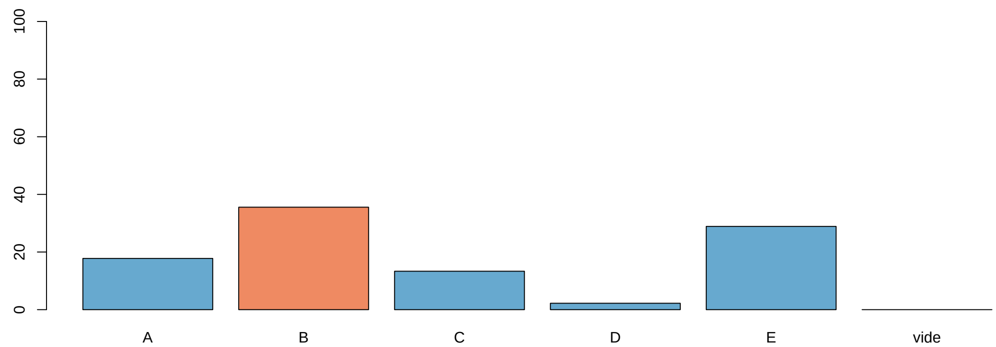
On vérifie au passage que cette probabilité est positive et on peut réécrire

$$\mathbb{P}(Y = y) = \exp(-y + 1) \cdot (1 - \exp(-1)) = \exp(-1 \cdot [y - 1]) \cdot (1 - \exp(-1))$$

soit

$$\mathbb{P}(Y = y) = q^{y-1} \cdot (1 - q) \text{ avec } q = e^{-1} \in (0, 1)$$

et $y \in \mathbb{N}_\star$, c'est donc bien une loi géométrique. On a la réponse B. En fait, on aurait pu se passer de tous calculs, car une seule réponse somme à 1, et c'est B. A condition de sommer sur $\mathbb{N}_\star$ (et pas sur $\mathbb{N}$, sinon il faudrait retenir la réponse C : en fait, C correspond à la loi de la *vraie* partie entière, celle définie sur $\mathbb{N}$). On notera au passage que certaines valeurs ne sont même pas sommable, comme A, qui vaut $+\infty$ quand on somme tous les termes.



$\boxed{2}$ Une compagnie d'assurance détermine que le nombre de réclamations durant une semaine N est tel que $\text{P}(N = n) = k/2^n, n \geq 0$, où k est une constante. Trouver la fonction génératrice des moments du nombre d'accidents durant 4 semaines consécutives (on suppose l'indépendance d'une semaine à l'autre).

A) $4(2 - e^t)^{-1}$ B) $3^2(2 - e^t)^{-4}$ C) $(2 - e^t)^{-4}$ D) $2(1 - e^t)^{-1}$ E) $\dfrac{(1 - e^t)^{-4}}{32}$

La aussi, c'est une loi géométrique. Si on veut la constante, on utilise

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n) = k \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = k \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2k = 1$$

Pour une semaine unique

$$M_N(t) = \mathbb{E}(e^{tN}) = \sum_{n \geq 0} e^{tN} \cdot \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^t}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^t/2}$$

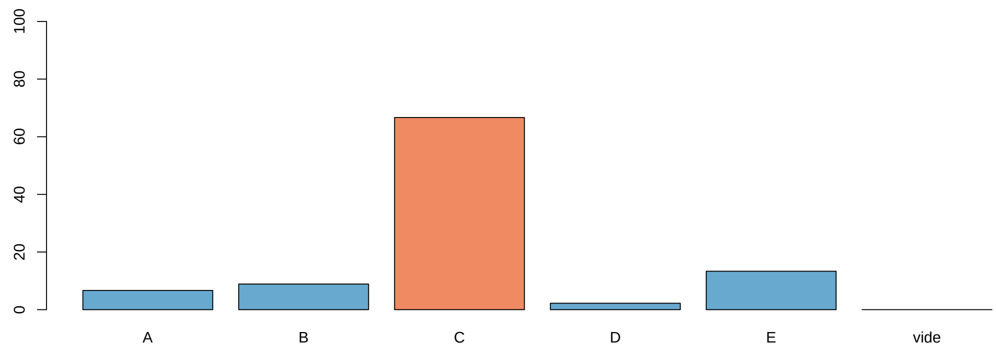
soit

$$M_N(t) = \frac{1}{2 - e^t} = (2 - e^t)^{-1}.$$

Maintenant, pour 4 semaines, en supposant l'indépendance, si $M = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$

$$M_M(t) = M_{N_1}(t) \cdot M_{N_2}(t) \cdot M_{N_3}(t) \cdot M_{N_4}(t) = (M_N(t))^4 = (2 - e^t)^{-4},$$

qui semble correspondre à la réponse C.



$\boxed{3}$ Soit Y la somme de deux variables aléatoire continues indépendantes de même fonction de densité $f_X(x) = 2e^{-2x}$, $x > 0$. Trouver la série génératrice des moments de Y.

A) $\dfrac{4}{4+4t+t^2}$ B) $\dfrac{4}{4-t}$ C) $\dfrac{1}{(1-2t)^2}$ D) $\dfrac{1}{1-2t}$ E) $\dfrac{4}{4-4t+t^2}$

Y est la somme de deux lois exponentielles, c'est donc une loi Gamma. Mais peu importe, personne ne connaît par cœur la fonction génératrice des moments d'une loi gamma (pour l'instant). Bref, on va la retrouver. Par indépendance, on sait que

$$M_Y(t) = (M_X(t))^2$$

Maintenant on regarde pour X,

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{tx} \cdot 2e^{-2x}dx$$

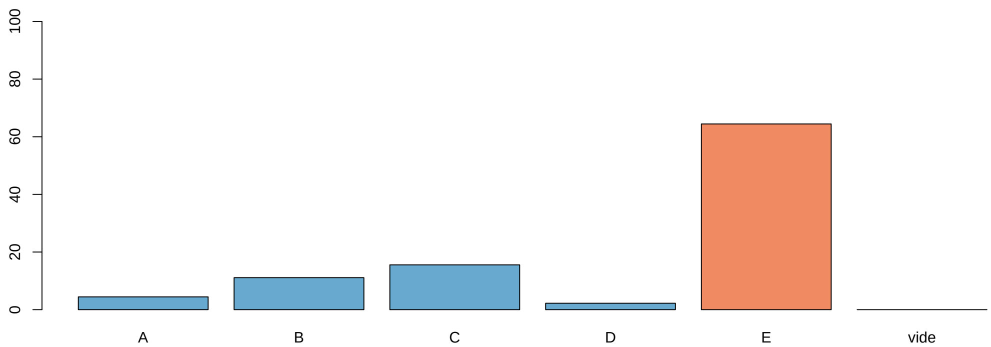
soit

$$2\int_0^\infty e^{tx-2x}dx = 2\int_0^\infty e^{-[2-t]x}dx = 2\left[\frac{-e^{-[2-t]x}}{2-t}\right]_0^\infty = \frac{2}{2-t}$$

Il reste à prendre le carré de cette fonction,

$$M_Y(t) = \left(\frac{2}{2-t}\right)^2 = \frac{4}{4-4t+t^2}$$

(histoire de retrouver une réponse proposée) : c'est donc la réponse E.



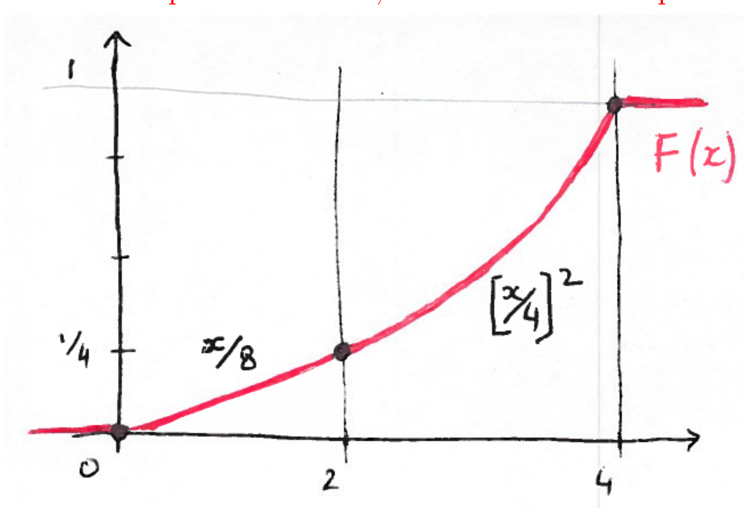
$\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{8} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

Calculer $\text{Var}(X - 1) + 1$.

A) 2.76 B) 2.56 C) 2.36 D) 2.16 E) 1.96

Notons que cette fonction de répartition est (absolument) continue donc admet une densité. On peut la calculer, et calculer les deux premiers moments



C'est parti !

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{8} & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(X^k) = \int x^k f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{x^k}{8} dx + \int_2^4 \frac{x^{k+1}}{8} dx$$

Aussi

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 \frac{x}{8} dx + \int_2^4 \frac{x^2}{8} dx = \left[\frac{x^2}{2 \cdot 8}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3 \cdot 8}\right]_2^4$$

i.e.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4-0}{16} + \frac{64-8}{24} = \frac{31}{12}$$

alors que

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 \frac{x^2}{8} dx + \int_2^4 \frac{x^3}{8} dx = \left[\frac{x^3}{3 \cdot 8}\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4 \cdot 8}\right]_2^4$$

i.e.

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{8-0}{24} + \frac{256-16}{32} = \frac{47}{6}$$

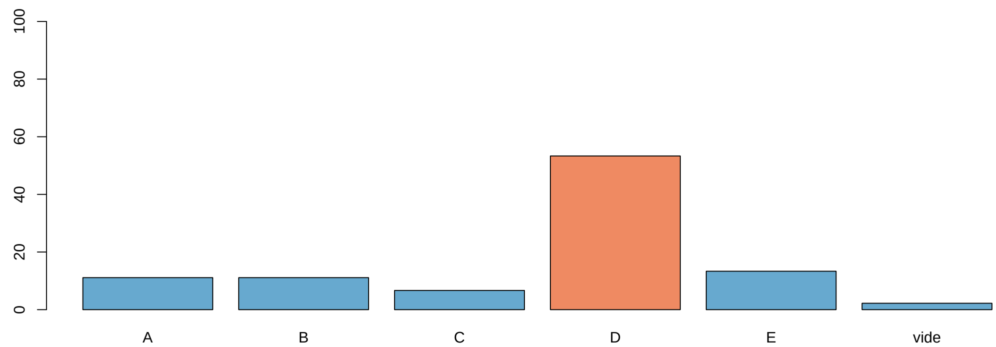
Aussi,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{47}{6} - \frac{31^2}{12^2} = \frac{167}{144}$$

Et comme $\text{Var}(X-1) = \text{Var}(X)$, on en déduit que

$$\text{Var}(X-1) + 1 = \frac{311}{144} \sim 2.15972$$

qui correpond à la réponse D.



$\boxed{5}$ Si $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{5}{9}$, alors que vaut $\mathrm{P}(A \cap B)$?

A) $\dfrac{1}{36}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{3}$

Rappelons que, par la formule de Bayes

$$(P)(A|B) = \frac{(P)(A \cap B)}{(P)(B)}$$

et

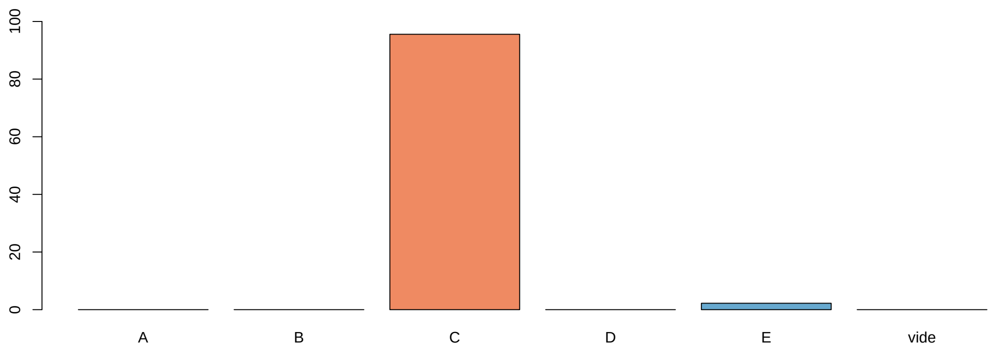
$$(P)(B|A) = \frac{(P)(A \cap B)}{(P)(A)}$$

de telle sorte que

$$(P)(A|B) + (P)(B|A) = \frac{(P)(A \cap B) \cdot [(P)(A) + (P)(B)]}{(P)(A) \cdot (P)(B)} = \frac{5}{9}$$

Comme on connait les deux probabilités $(P)(A)$ et $(P)(B)$, on peut récupérer celle qui nous manque. En l'occurence on doit arriver sur $1/9$ qui est la réponse C (comme tout le monde l'a trouvé, on passe vite...).

$\boxed{6}$ La durée de vie du chien Rex est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, 20]$ alors que la durée de vie du chien Fido est de loi exponentielle. On suppose

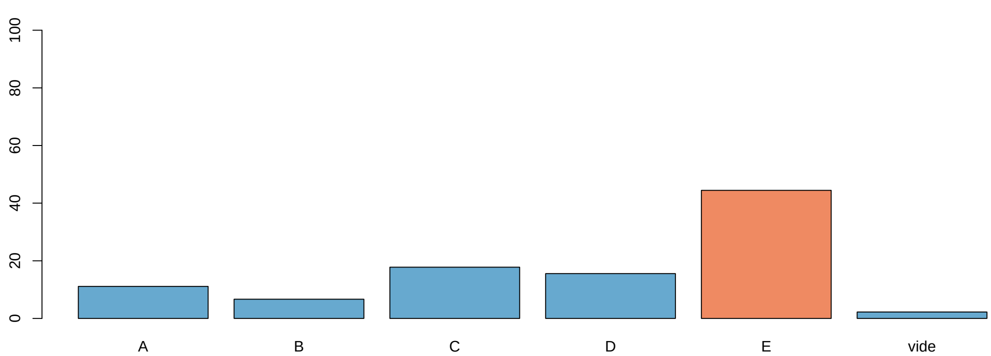


que les deux durées de vie sont indépendantes et de même moyenne. Trouver la probabilité que Fido meure avant Rex.

A) 0.412 B) 0.450 C) 0.499 D) 0.543 E) 0.568

1 $\frac{}{20\int_0^{20} 1-\exp\left(-\frac{u}{10}\right)du} i.e.$

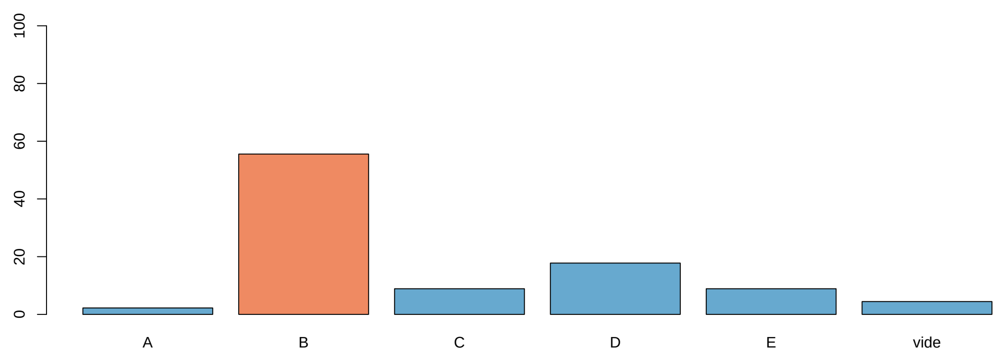
1-1 $\frac{}{20\int_0^{20} 10\cdot\left[-\exp\left(-\frac{e}{10}\right)de\right]_0^u du=1-\frac{10}{20}\left[-\exp\left(-\frac{u}{10}\right)\right]_0^{20}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)} soit(enfin)\mathbb{P}(E \leq U) = \frac{1+e^{-2}}{2} \sim 0.5676676 quiestlarponseE.$



$\boxed{7}$ Soit A et B deux événements. On sait que : (i) $\mathrm{P}((A \cup B)^c) = 3\mathrm{P}(A \cap B)$; (ii) $\mathrm{P}(A) = 2\mathrm{P}(B)$; (iii) $\mathrm{P}(A \cap B^c) = 6\mathrm{P}(A \cap B)$. Trouver $\mathrm{P}(B)$.

A) 7/50 B) 7/25 C) 3/10 D) 7/20 E) 14/25

Il faut se lancer dans les calculs, on avait fait des exercices similaires durant les premières sessions, et on arrive à la réponse B.



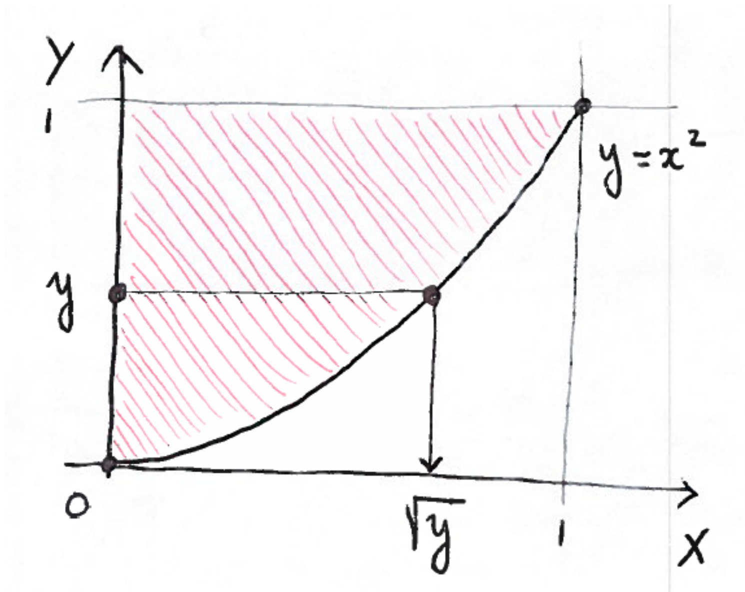
$\boxed{8}$ Soit X et Y des variables aléatoires de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y) = 4x$ pour $0 < x < 1$ et $0 < x^2 < y < 1$. Trouver la fonction de densité de la loi marginale de Y.

A) $2(1-y)$ B) $2y$ C) $3y^2$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{y}$ E) 1

On peut utiliser ici la formule de probabilités totales (dans sa version continue)

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx$$

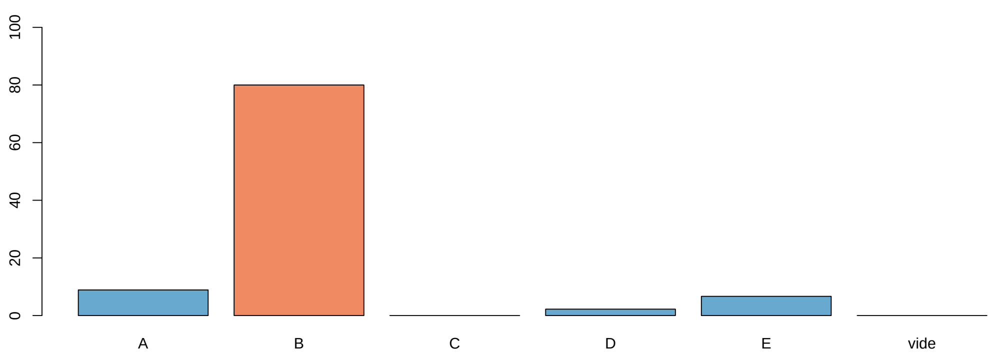
(il suffit comme toujours de faire un petit dessin pour trouver le domaine d'intégration)



soit ici

$$f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}} f_{X,Y}(x,y)dx$$

ensuite c'est du calcul assez simple, et on arrive à la réponse B. Là encore, on avait fait ce genre d'exercice plusieurs fois.



$\boxed{9}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(3-2x)/5 & \text{pour } 0 \le x \le 1 \\ 2(2-x)/5 & \text{pour } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver la médiane de X.

A) 0.33 B) 0.40 C) 0.50 D) 0.67 E) 0.80

Notons tout d'abord que

$$\mathbb{P}(X \le 1) = \int_0^1 \frac{2(3-2x)}{5} dx = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\int_0^1 2x dx = \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$$

Aussi, la médiane est forcément entre 0 et 1. On va alors chercher $m \in (0,1)$ tel que

$$\mathbb{P}(X \le m) = \frac{1}{2} = \int_0^m \frac{2(3-2x)}{5} dx = \frac{6m}{5} - \frac{2}{5}\int_0^m 2x dx$$

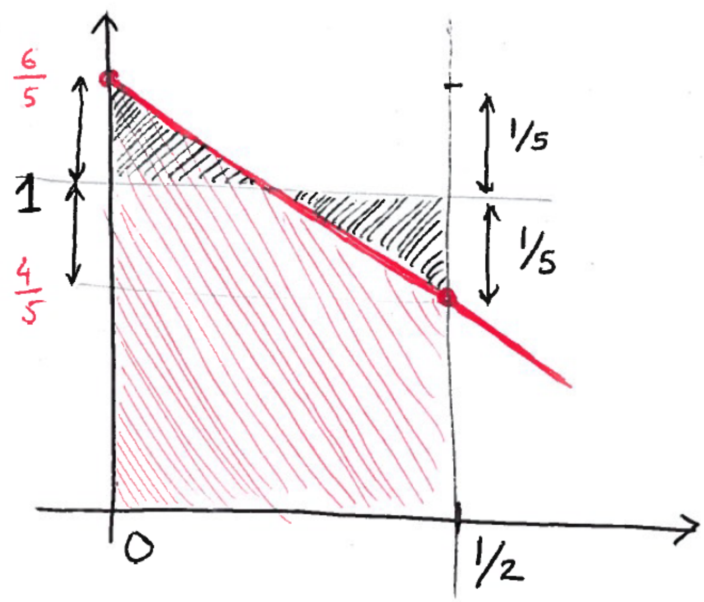
i.e.

$$\mathbb{P}(X \le m) = \frac{1}{2} = \frac{6m}{5} - \frac{2m^2}{5} = \frac{6m - 2m^2}{5}$$

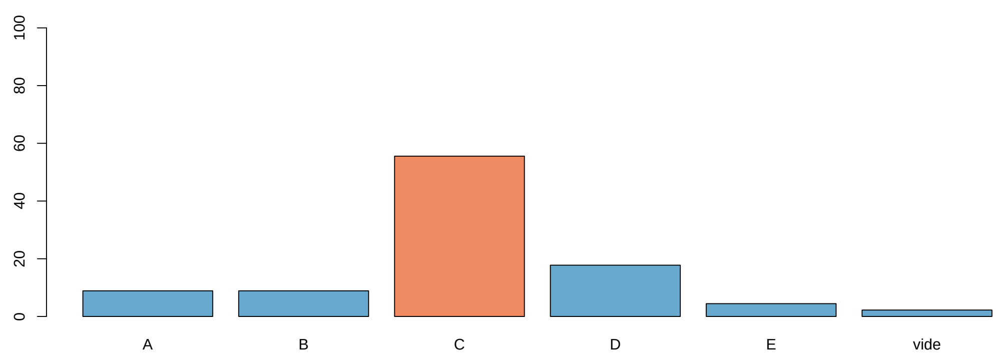
On arrive donc à une équation du second degré,

$$\frac{6m - 2m^2 - 5}{10} = 0$$

qui est une parabole admettant deux racines, $1/2$ et $5/2$ (cette dernière ne pouvant convenir). On retient donc la réponse C. Pour les amateurs de dessins (s'il en reste), on retrouvera que trivialement, l'aire entre 0 et $1/2$ faut effectivement $1/2$ (les deux aires hachurées noires étant égales),



6/5
1
4/5
1/5
1/5
0
1/2



0
20
40
60
80
100
A
B
C
D
E
vide

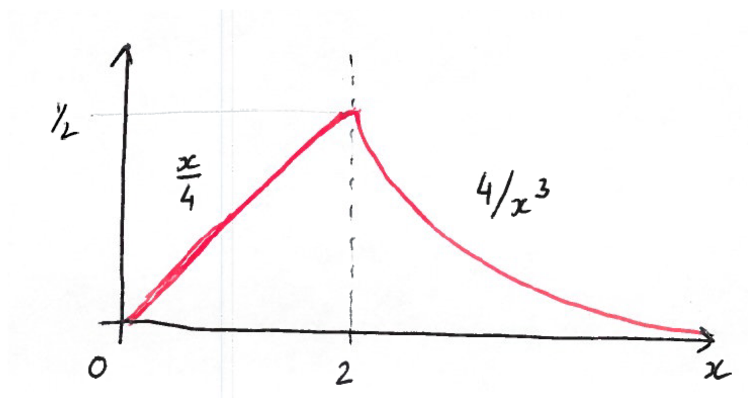
$\boxed{10}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < 0 \\ x/4 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 4/x^3 & \text{pour} \quad x > 2 \end{cases}$$

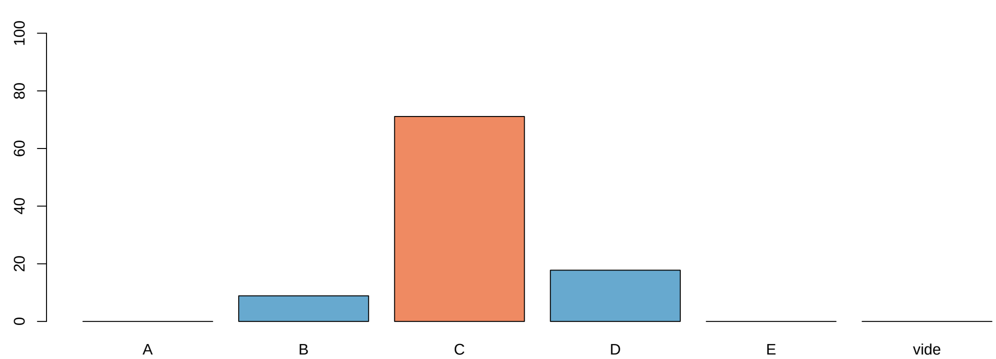
Trouver $P(1 < X < 4 \mid X > 1)$.

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{7}$

Tiens, on l'avait fait en cours la semaine passée celui là…



Je laisse les amateurs de calculs le refaire, il fallait trouver la réponse C (13.13 du livre de Jacques Labelle), ce qu'avait obtenu la grande majorité.



$\boxed{11}$ Pour une police d'assurance le nombre de réclamations est $N = 0, 1$ ou 2, avec probabilités $0.5, 0.3$ et 0.2 respectivement. On a l'information suivante : $\text{E}[S|N = 0] = 0$, $\text{V}ar[S|N = 0] = 0$, $\text{E}[S|N = 1] = 10$, $\text{Var}[S|N = 1] = 5$, $\text{E}[S|N = 2] = 20$, $\text{Var}[S|N = 2] = 8$. Trouver la variance de S.

A) 3.1 B) 31 C) 61 D) 64.1 E) 85

Celui là aussi, on l'avait fait en cours. Il fallait utiliser la formule de décomposition de la variance,

$$\text{Var}(S) = \text{ Var } (\mathbb{E}[S|N]) + \mathbb{E}(\text{ Var } [S|N])$$

Commençons par la fin.

$$\mathbb{E}(\text{ Var } [S|N]) = \sum_n \mathbb{P}(N = n) \cdot \text{ Var } [S|N = n]$$

par définition de l'espérance. Si on remplace maintenant par les valeurs,

$$\mathbb{E}(\text{ Var } [S|N]) = \frac{5}{10} \cdot 0 + \frac{3}{10} \cdot 5 + \frac{2}{10} \cdot 8 = \frac{31}{10}$$

Pour le premier terme, on cherche la variance de la variable suivante

$$Z = \mathbb{E}[S|N] = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } 5/10 \\ 10 & \text{avec probabilité } 3/10 \\ 20 & \text{avec probabilité } 2/10 \end{cases}$$

On devrait être capable de calculer $\text{Var } (Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$,

$$\text{Var } (Z) = \left[\frac{5}{10} \cdot 0^2 + \frac{3}{10} \cdot 10^2 + \frac{2}{10} \cdot 20^2\right] - \left[\frac{5}{10} \cdot 0 + \frac{3}{10} \cdot 10 + \frac{2}{10} \cdot 20\right]^2$$

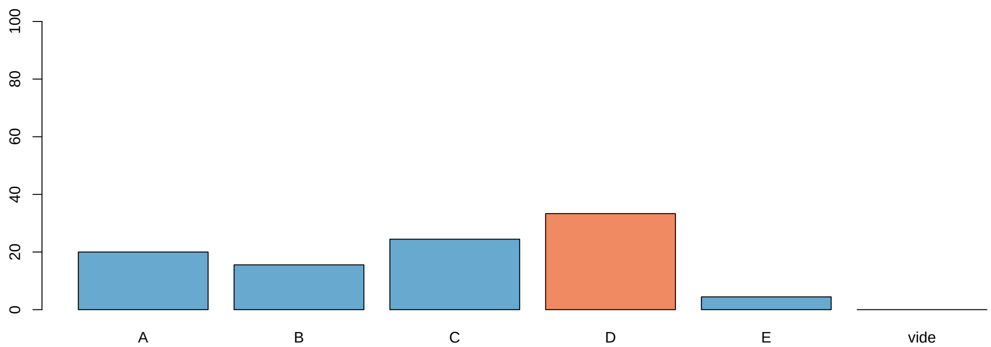
soit

$$\text{Var } (Z) = 61$$

si on remet tout ensemble, on obtient

$$\text{Var}(S) = 61 + \frac{31}{10} = \frac{641}{10} = 64.1$$

qui est la réponse D.



$\boxed{12}$ La fonction de densité de la loi marginale de X est $f_X(x) = (1/4)(x+1)$, $0 < x < 2$. La fonction de densité de la loi conditionnelle de $Y|X = x$ est

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{x+y}{2(x+1)},\ 0 < y < 2.$$

Trouver la fonction de densité de la loi marginale de Y.

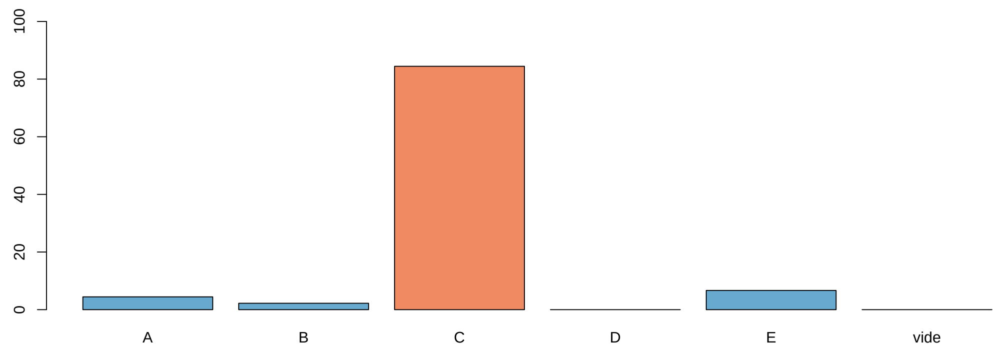
A) $\dfrac{2+y}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1+y}{4}$ D) $\dfrac{y}{2}$ E) $\dfrac{3y^2}{8}$

On utilise ici la version continue de la formule des probabilités totales (et la formule de Bayes)

$$f_Y(y) = \int_0^2 f_{Y|X}(y|x)\ f_X(x)\ dx$$

Un peu de calcul (simple) donne la réponse C. Passons rapidement pour passer plus de temps sur les calculs plus complexes.

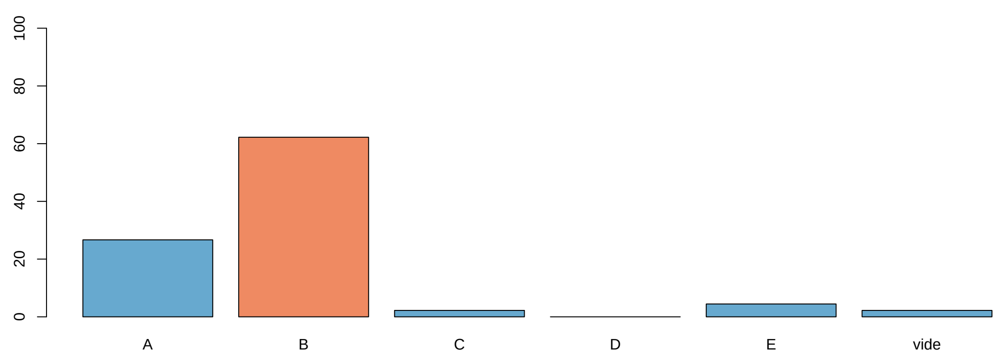
$\boxed{13}$ Pour un conducteur automobile, les accidents peuvent résulter en des pertes de 0, 1 000, 5 000, 10 000, ou, 15 000, avec des probabilités respectives de 0.75, 0.12, 0.08, 0.04, et, 0.01. Un assureur offre une police qui rembourse la perte mais sujette à un déductible de 500 et un (remboursement) maximum



de 12 000. L'assureur fixe la prime à 10% de plus que l'espérance de la perte du conducteur. Trouver la prime chargée par l'assureur.

A) 1 012 B) 1 177 C) 1 098 D) 1 205 E) 1 291

Rien de bien compliqué ici, il fallait trouver la réponse B (exercice 13.12 du livre de Jacques Labelle).

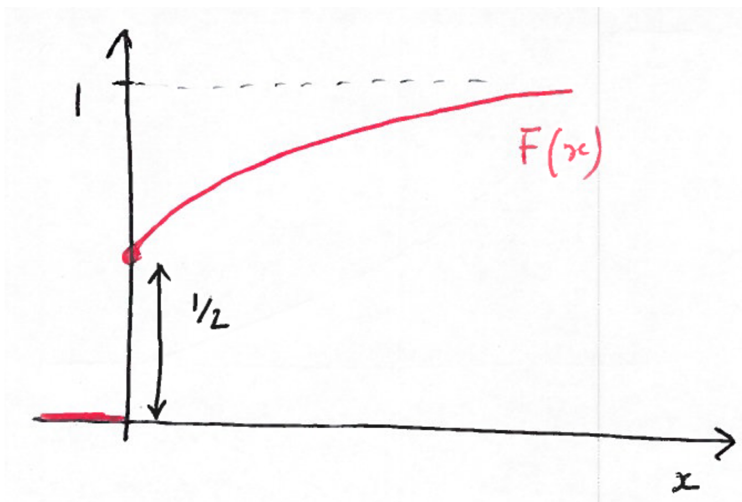


$\boxed{14}$ Soit $F_X(x) = 1 - e^{-x}/2$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$.

Trouver la série génératrice des moments $M_X(t)$ de X.

A) $\dfrac{1}{1-t}$ B) $\dfrac{1}{2-2t}$ C) $\dfrac{2-t}{2-2t}$ D) $\dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2(1+t)}$ E) n'existe pas

Oh, un exercice fait en cours, évoqué sur le blog, et posé dans le dernier intra (et corrigé en détails). On commence par tracer la fonction de répartition, avant de se lancer dans le calcul de l'espérance.



Comme on va le (re)voir, on a ici un mélange entre une masse de Dirac en $\{0\}$ (avec probabilité $1/2$) et une loi exponentielle (on va le montrer proprement dans quelques lignes), avec probabilité $1/2$. Rappelons que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|Z)).$$

Prenons ici $Y = e^{tX}$ et Z la variable de Bernoulli, $Z = \mathbf{1}(X = 0)$. Alors

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tX}|Z)) = \mathbb{E}(e^{tX}|Z = 1) \cdot \mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(e^{tX}|Z = 0) \cdot \mathbb{P}(Z = 0).$$

Pour obtenir les différentes probabilités, on regarde le dessins (on reviendra sur ce point à la question 21). Ensuite, on note que $\mathbb{E}(e^{tX}|Z = 1) = \mathbb{E}(e^{tX}|X = 0)=\mathrm{e}^0 = 1$. Et la loi de X sachant $X > 0$ (i.e. $Z = 0$) est ici

$$\overline{F}_\star(x) = \mathbb{P}(X > x|X > 0) = \frac{\mathbb{P}(X > x)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{e^{-x}/2}{e^{-0}/2} = e^{-x}$$

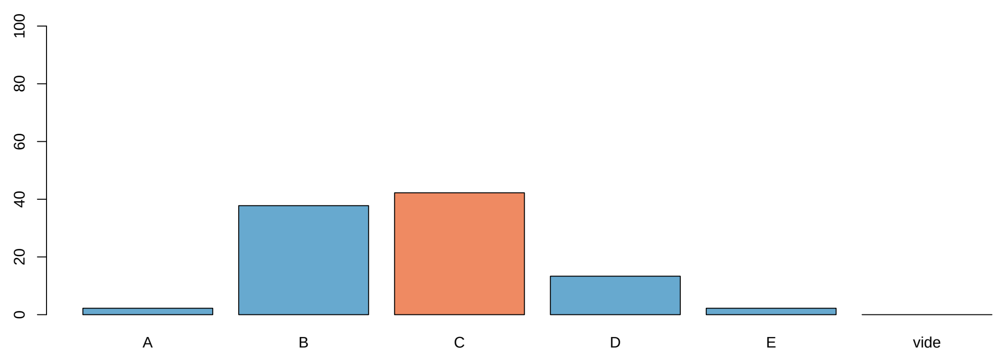
qui est la loi exponentielle de paramètre 1. Aussi,

$$\mathbb{E}(e^{tX}|Z=0) = \mathbb{E}(g(X)|X>0) = \int_0^\infty g(x)f_\star(x)dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x}dx = \frac{1}{1-t}$$

Aussi,

$$M_X(t) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} = \frac{2-t}{2-2t},$$

qui est la réponse C.



$\boxed{15}$ Un actuaire a modélisé les dépenses hospitalières d'une police d'assurance par une variable aléatoire X de fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \text{pour } x > 0.$$

Si les dépenses augmentent de 20% et que Y représente la nouvelle valeur des dépenses hospitalières, trouver la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y.

A) $\dfrac{2}{\left(\frac{5}{6}y+1\right)^3}$ B) $\dfrac{5}{3\left(\frac{5}{6}y+1\right)^3}$ C) $\dfrac{12}{5\left(\frac{6}{5}y+1\right)^3}$

D) $\dfrac{25y^2+60y}{25y^2+60y+36}$ E) $\dfrac{36}{25y^2+60y+36}$

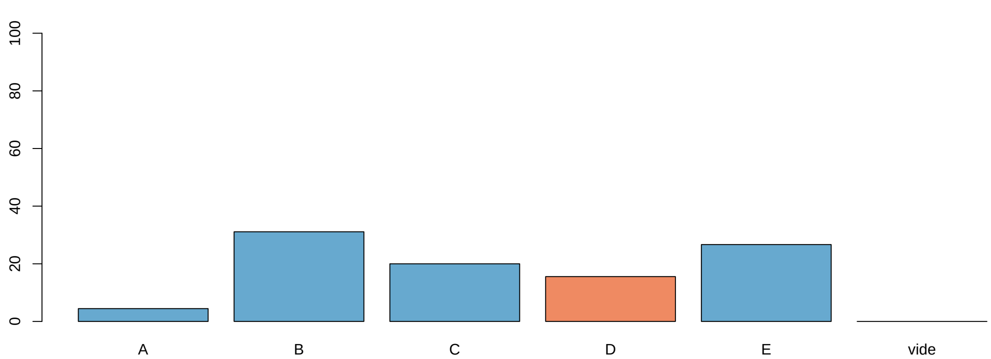
Si j'étais paresseux (et je le suis), je regarderais laquelle de ces fonctions est une function de répartition. Comme Y prend ses valeurs sur $[0,\infty)$ une condition nécessaire et suffisante pour que $F_Y(\cdot)$ soit une fonction de répartition est que les trois conditions suivantes soient satisfaites,

- $F_Y(0)=0$
- $F_Y(y)\to 1$ lorsque $y\to\infty$
- $F_Y(\cdot)$ doit être croissante sur $\mathbb{R}^+$

Regardons en 0 : la seule valeur nulle en 0 est obtenue avec D (sinon on a respectivement 2, 5/3, 12/5 et 1). Bref, on pourra s'arrêter là et conclure D. Regardons en $+\infty$: la seule fonction qui tend vers 1 en $+\infty$ est obtenue avec D (sinon on aurait 0). Bref, on va finir par être convaincu. Encore une fois, il faut retenir une solution... Pour les amateurs de calcul intégral, il est possible d'écrire Par construction, $Y=1.2X=\frac{6}{5}X$, donc

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}\left(\frac{6}{5}X\leq y\right)=\mathbb{P}(X\leq\frac{5y}{6})=\int_0^{\frac{5y}{6}}f_X(x)dx$$

...et patati et patata. Cela dit, comme je vois les statistiques, je pense qu'il vaudrait mieux trouver d'autres stratégies que faire des calculs, autant être pragmatique! Bref, pour avoir des points, il fallait entourer la réponse D.



$\boxed{16}$ Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver la probabilité que le troisième nombre (en ordre croissant de grandeur), ou en d'autres mots $X_{(3)}$, soit entre $1/4$ et $1/2$.

A) 0.140 B) 0.156 C) 0.188 D) 0.211 E) 0.262

On veut $\mathbb{P}(1/4 < X_{(3)} \leq 1/2) = F_3(1/2) - F_3(1/4)$ où $F_3(\cdot)$ est la fonction de répartition de $X_{(3}$. Une solution est peut-être d'écrire la densité

$$f_3(x) = \int\int\int f_{1,2,3,4}(x_1, x_2, x, x_4) dx_1 dx_2 dx_4$$

où l'intégration se fait sur $\{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x \leq x_4 \leq 1\}$. Sinon, on peut faire un peu de combinatoire,

$$F_3(x) = \mathbb{P}(\text{au moins 3 des 4 } X \text{ sont } \leq x)$$

soit

$$F_3(x) = \sum_{j=3}^{3} \binom{3}{j} \mathbb{P}(X \leq x)^j (1 - \mathbb{P}(X \leq x))^{4-j} = \sum_{j=3}^{4} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{4-j}$$

où ici, les calculs sont faits en toute généralité. Ici, c'est assez simple, alors on va simplifier,

$$F_3(x) = 4F(x)^3(1 - F(x)) + F(x)^4 = F(x)^3 \cdot [4 - 3F(x)]$$

(le premier terme indiquant qu'exactement 3 sont plus petits que x, et le second qu'exactement 4 sont plus petits que x). On pourrait jouer un peu avec cette loi, car il y a plein de choses à dire... mais le but est de répondre à la question. Comme ici F est la fonction de répartition de la loi uniforme, on peut encore simplifier $F_3(x) = x^3 \cdot [4 - 3x]$. Donc ici

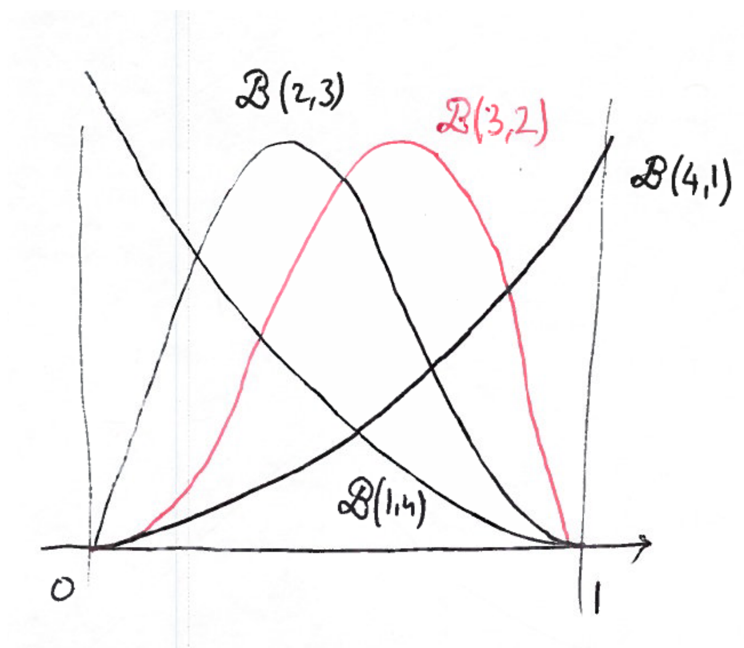
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4} < X_{(3)} \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^3} \cdot \left[4 - \frac{3}{2}\right] - \frac{1}{4^3} \cdot \left[4 - \frac{3}{4}\right]$$

soit

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4} < X_{(3)} \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{5 \cdot 2^4 - 13}{4^4} = \frac{67}{256} \sim 0.2617188$$

Pour les plus curieux, on notera que les lois des statistiques d'ordre d'une loi uniforme suivent des lois Beta. Aussi, ce qu'on nous demande c'est

$$B(1/2,3,2) - B(1/4,3,2) \text{ où } B(\cdot,a,b)) \text{ est la f.d.r. de la loi } \mathcal{B}(a,b)$$

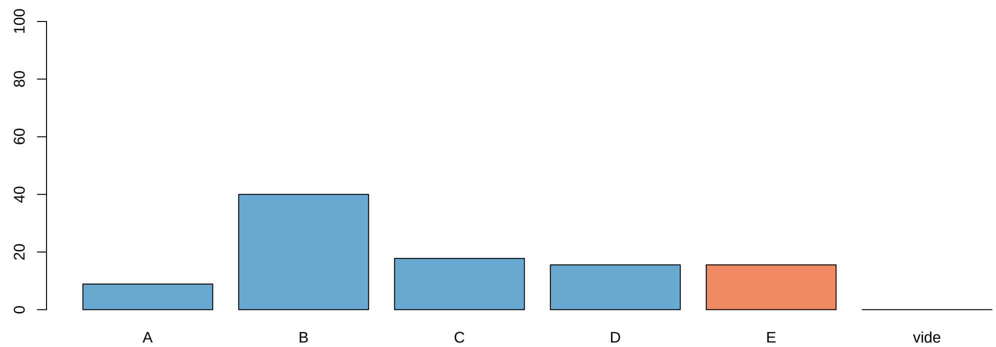


Ce qui ne nous sert pas à grand-chose car la fonction de répartition de la loi Beta ne se calcule pas à la main.... Cela dit

```
> pbeta(.5,3,2)-pbeta(.25,3,2)
[1] 0.2617188
```

Allez, un peu de simulations pour vérifier,

```
> n=250000
> set.seed(1)
> U=matrix(runif(n*4),n,4)
> S=apply(U,1,function(u) (sort(u)[3]>.25)&(sort(u)[3]<.5))
> mean(S)
[1] 0.260284
```



Manifestement la réponse E s'impose !.

$\boxed{17}$ Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 40]$. On définit X et Y deux nouvelles variables aléatoires sur l'intervalle $[0, 40]$ par :

$$X = \begin{cases} 2U & \text{si } 0 < U \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < U \leq 40 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < U \leq 20 \\ 2U & \text{si } 20 < U \leq 40. \end{cases}$$

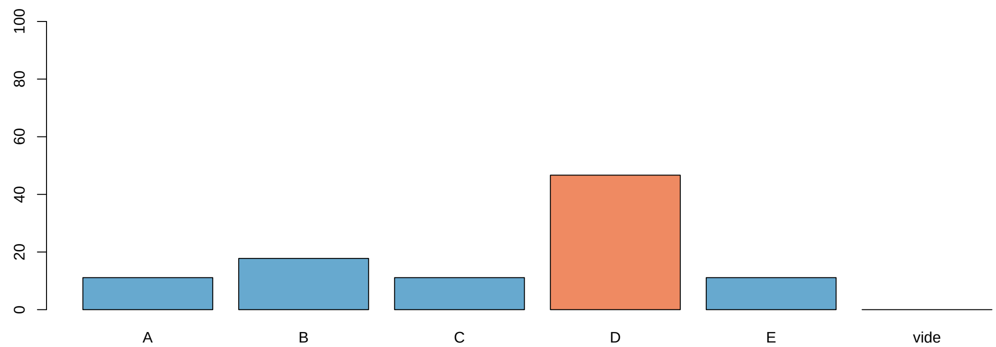
Calculer $\text{Var}(X + Y)$.

A) 253 B) 347 C) 419 D) 533 E) 645

Le plus simple est probablement de travailler sur la variable $X+Y$ et de voir si on peut l'écrire comme une fonction simple de U. Notons que $X + Y = 2U$. Bref,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(2U) = 4 \cdot \text{Var}(U) = 4 \cdot \frac{40^2}{12} = \frac{1600}{3} \sim 533$$

Qui est la réponse D.



$\boxed{18}$ Supposons que 20 nombres réels sont choisis uniformément et indépendamment sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver une approximation de la probabilité que la somme des 20 nombres soit inférieure à 8.

A) 0.06 B) 0.10 C) 0.14 D) 0.18 E) 0.22

Le mot 'approximation' veut dire qu'on va utiliser un théorème asymptotique. Le seul à notre disposition est le théorème central limite, donc regardons un peu pour voir. Soient $U_1, \cdots, U_{20}$ les 20 nombres tirés uniformément sur $[0, 1]$. Le théorème central limite nous dit que

$$\sqrt{n}\frac{\overline{U} - \mathbb{E}(U)}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ où } \overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

lorsque $n \to \infty$. Aussi, on va dire que

$$Z = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)}}\left(\frac{S}{20} - \mathbb{E}(U)\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

où S est la somme de nos 20 variables (c'est sur cette variable que porte la question de l'énoncé). On nous demande de calculer

$$\mathbb{P}(S > 8) = \mathbb{P}\left(\sqrt{20\cdot 12}[S/20 - 1/2] > \sqrt{20\cdot 12}[8/20 - 1/2]\right)$$

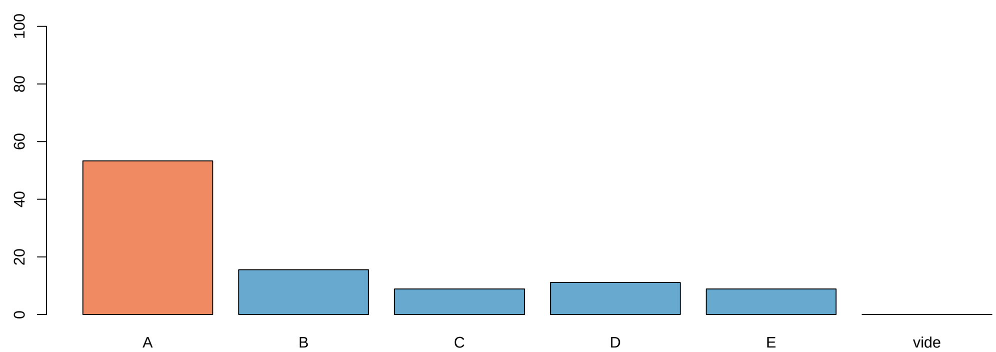
(car $\text{Var}(U) = 12^{-1}$ et $\mathbb{E}(U) = 2^{-1}$). Dans le terme de gauche, on reconnaît Z et donc on cherche

$$\mathbb{P}(S > 8) = \mathbb{P}\left(Z > \sqrt{20 \cdot 12}[8/20 - 1/2]\right) = \mathbb{P}(Z > -1.549193)$$

Compte tenu de la forme de la table qui est donnée, on utilise la symétrie de la loi de Z

$$\mathbb{P}(S > 8) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(Z > 1.549193)}_{\sim 0.9394}$$

si on regarde dans la table. Aussi, la probabilité recherchée est dans les 6%, qui est la réponse A.



$\boxed{19}$ Trouver le 90ième percentile de la variable aléatoire X de fonction de densité :

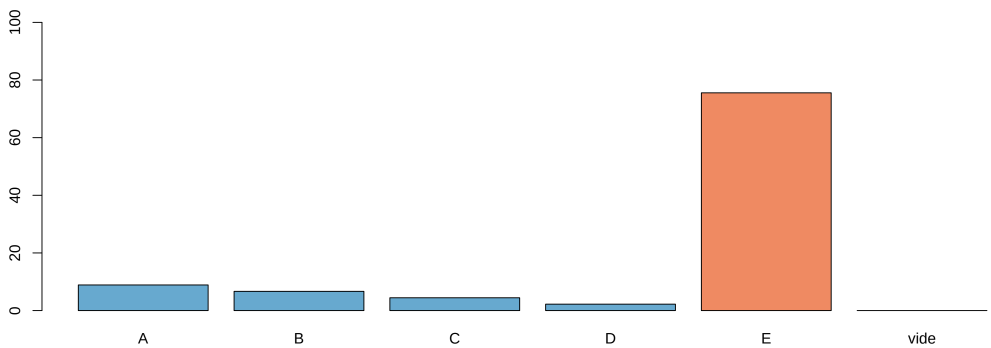
$$f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \text{ pour } x > 0.$$

A) 0.32 B) 2.08 C) 2.77 D) 4.16 E) 6.91

Oh, on reconnaît (j'espère) la loi exponentielle, de fonction de répartition $F_X(x) = 1 - \exp(-x/3)$. Bref, on cherche q tel que $1 - \exp(-q/3) = .9$, ou encore $\exp(-q/3) = .1$, soit

$$-\frac{q}{3} = \log(0.1) \text{ soit } q = -3\log(0.1) = 3\log(10) \sim 6.91$$

qui est la réponse E.



$\boxed{20}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = (1 - 10t + 25t^2)^{-2}.$$

Trouver $\text{Var}[X]$.

A) 25 B) 50 C) 250 D) 150 E) 100

Oh, un exercice fait la semaine passée en cours ! Notons que

$$M_X(t) = (1 - 10t + 25t^2)^{-2} = (1 - 5t)^{-4} = M_Y(t)^4$$

Avec $M_Y(t) = \dfrac{1}{-5t}$. Soit on reconnaît la loi géométrique, soit on note que

$$\frac{1}{1-5t} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{}_{\mathbb{P}(Y=n)} = \sum_{n\geq 0} e^{-tn} \cdot \underbrace{}_{\mathbb{P}(Y=n)}$$

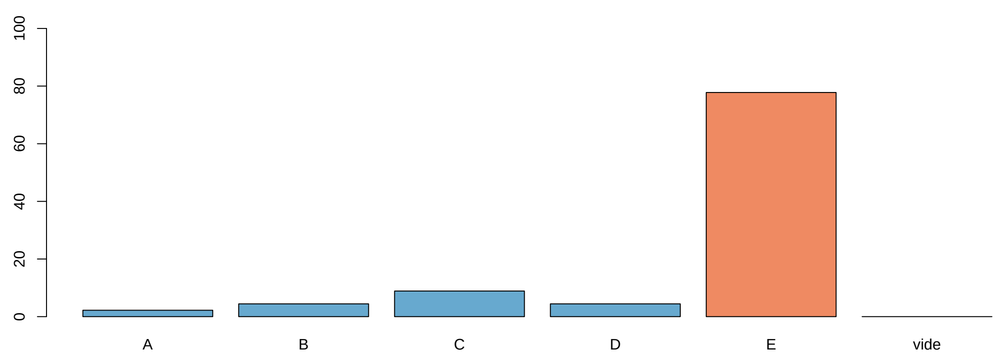
(tiens, encore une loi géométrique) et on calcule ensuite la variance, soit on fait des calculs de dérivée de la fonction $(1-5t)^{-1}$, soit (on va peut être s'arrêter là) utiliser un développement limité à l'ordre 2,

$\dfrac{1}{1-5t} = 1 + 5t + (5t)^2 + \ldots$ or $M_Y t = 1 + \mathbb{E}(Y)\ t + \dfrac{+\mathbb{E}(Y)}{2}\ t^2 + \ldots$

Donc, par identification (par unicité du développement en série entière),

$$\mathbb{E}(Y) = 5 \text{ et } \mathbb{E}(Y^2) = 2 \cdot 5^2$$

Bref, Var(Y) $= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 5^2$. Maintenant, on note que $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ où les Y_i sont indépendants (c'est l'exposant 4 dans M_X) et donc $\text{Var}(X) = 4 \cdot \text{Var}(Y)$ soit 100, qui est la réponse E.



$\boxed{21}$ Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

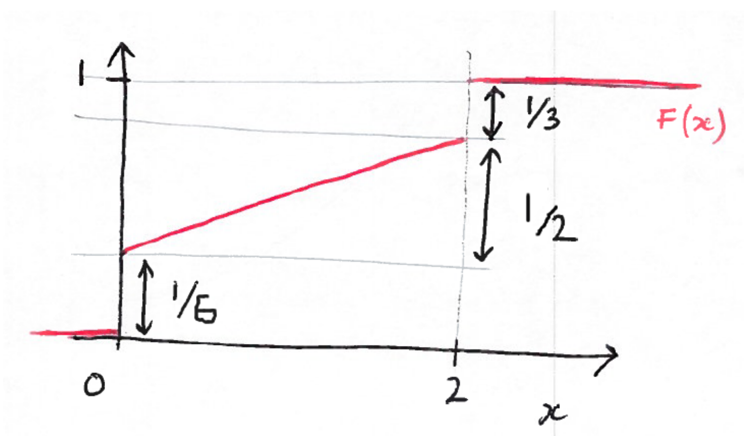
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (3x+2)/12 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Trouver E$[X]$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{6}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Encore un exercice fait en cours il y a 2 semaines cette fois (j'avais tenu à ce qu'on fasse cet exercice car la solution ne s'invente pas tout seul, comme en témoignent les statistiques de réponse). La subtilité est de noter que F_X n'est pas (absolument) continue, puisque la fonction de réparition présente deux sauts : un en $\{0\}$ et en $\{2\}$, correspondant - par définition de la fonction de répartition à deux masses de Dirac, en $\{0\}$ et un en $\{2\}$. Plus formellement, en effet, si

$$\lim_{x\uparrow a} F_X(x) \neq \lim_{x\downarrow a} F_X(x), \text{ alors } \mathbb{P}(X=a) = \left[\lim_{x\downarrow a} F_X(x)\right] - \left[\lim_{x\uparrow a} F_X(x)\right]$$



Bref, on avait un mélange entre deux masses de Dirac, et une loi uniforme sur $[0,1]$ (car seule la loi uniforme a sa f.d.r. linéaire sur un intervalle). Bref, Z est une variable aléatoire prenant les valeurs $\{A,B,C\}$ avec probabilités 1/6, 1/3 et 5/12 respectivement. Assi la variable aléatoire

$$Y = \begin{cases} D_1 = \delta_0 \text{ si } Z = A \\ D_2 = \delta_2 \text{ si } Z = B \\ U \sim \mathcal{U}([0,2]) \text{ si } Z = C \end{cases}$$

a pour loi F_X (je laisse vérifie que la loi conditionnelle est une loi uniforme quand on est entre les deux bornes). Bref, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$. Mais tout ça se retrouvait à partir de la formule de double projection. Soit Z la variable

$$Z = \begin{cases} A \text{ si } X = 0 \\ B \text{ si } X = 2 \\ C \text{ si } X \in (0,2) \end{cases}$$

(on notera que $\mathbb{P}(Z \in \{A,B,C\}) = 1$) alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X|Z])$$

Soit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{z\in\{A,B,C\}} \mathbb{E}[X|Z=z]\cdot\mathbb{P}(Z=z)$$

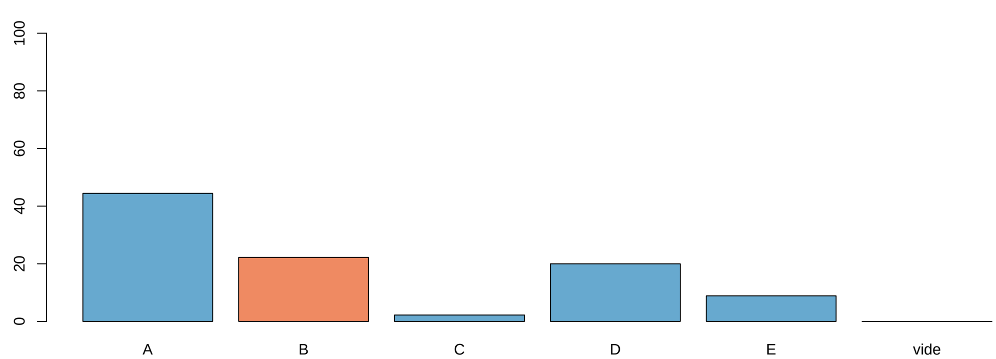
Bon, on se lance maintenant.

- $\mathbb{E}[X|Z=A] = \mathbb{E}[D_1] = 0$
- $\mathbb{E}[X|Z=B] = \mathbb{E}[D_2] = 2$
- $\mathbb{E}[X|Z=C] = \mathbb{E}[U] = 1$

Aussi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2\cdot 2+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Pour information, cet exercice avait été donné au troisième intra, il y a un an. Des compléments se trouvent dans la correction, car cet exercice - tiré du livre de Jacques Labelle - n'avait aucune réponse valide dans le livre. La bonne réponse est ici la réponse B.



$\boxed{22}$ Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. Supposons que X est de loi de Poisson de paramètre 3 et que la variable conditionnée $Y|X = x$ suit aussi une loi de Poisson, cette fois de paramètre $3x$. Trouver la variance de Y.

A) 36 B) 33 C) 30 D) 27 E) 9

On a ici le théorème de Pythagore, de décomposition de la variance,

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\,(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}(\text{Var}\,[Y|X])$$

C'est un peu l'exercice classique sur les lois conditionnelles (qu'on avait fait en classe la semaine passée). Y sachant $X = x$ suit une loi de Poisson, de paramètre $3x$, donc

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \text{Var}[Y|X = x] = 3x$$

Aussi, les *variables aléatoires* $\mathbb{E}[Y|X]$ et $\text{Var}[Y|X]$ sont égales à $3X$. On en déduit que

$$\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) = \text{Var}(3X) = 3^2\text{Var}(X)$$

et de manière parfaitement symétrique

$$\mathbb{E}(\text{Var}[Y|X]) = \mathbb{E}(3X) = 3\mathbb{E}(X).$$

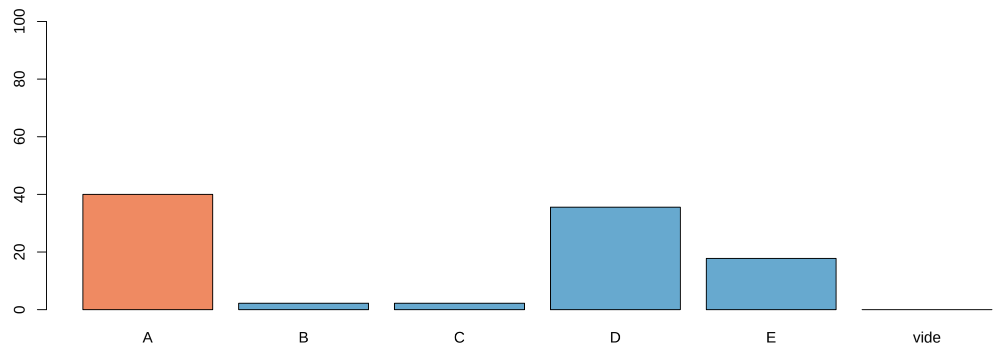
Or on sait que X suite une loi de Poisson de paramètre 3, de telle sorte que

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = 3.$$

Bref, on peut finalement en conclure que

$$\text{Var}(Y) = 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 + 9 = 36$$

qui est la réponse A.



$\boxed{23}$ Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes dont la distribution est la même, soit $p(x) = 1/2$ pour $x = 0$ et $p(x) = 1/2$ pour $x = 1$. Trouver la fonction génératrice des moments de $U = X^2Y^2Z^2$.

A) $\dfrac{7e^t+1}{8}$ B) $\dfrac{1+e^t}{8}$ C) $\dfrac{7+e^t}{8}$ D) $1+\dfrac{1}{8}e^t$ E) $\left(\dfrac{e^t+1}{2}\right)^{3/2}$

Les variables X, Y et Z sont indépendantes, et de loi de Bernouilli, prenant les valeurs 0 et 1. Bref, $X^2 = X$, donc l'exposant 2 ici ne sert à rien. Et le produit ne peut prendre que 2 valeurs, 0 et 1. Bref, $U = X^2Y^2Z^2$ est aussi une loi de Bernoulli, avec

$$\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(X = Y = Z = 1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}$$

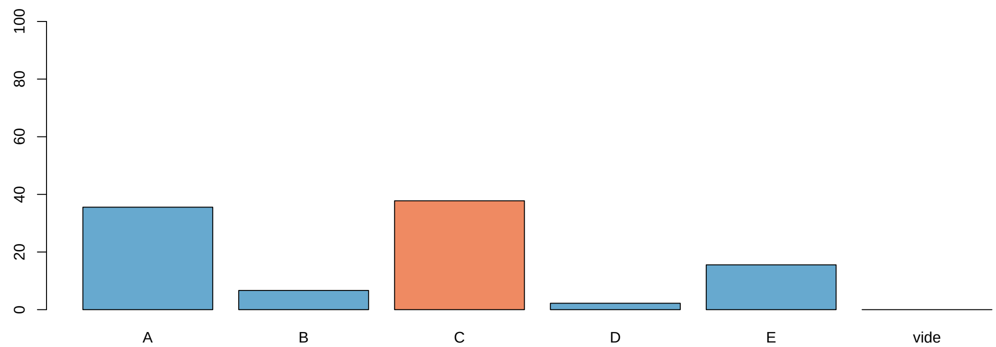
Aussi, par construction de la fonction génératrice des moments

$$M_U(t) = e^{t0} \cdot \mathbb{P}(U = 0) + e^{t1} \cdot \mathbb{P}(U = 1)$$

soit

$$M_U(t) = \frac{7}{8} + e^t \cdot \frac{1}{8} = \frac{7+e^t}{8}$$

Qui est la réponse C.



$\boxed{24}$ Dans un examen de classement suivi par des milliers de personnes, la note d'un étudiant pris au hasard suit une loi normale de moyenne 65 et variance 100. Les correcteurs décident du barème suivant :

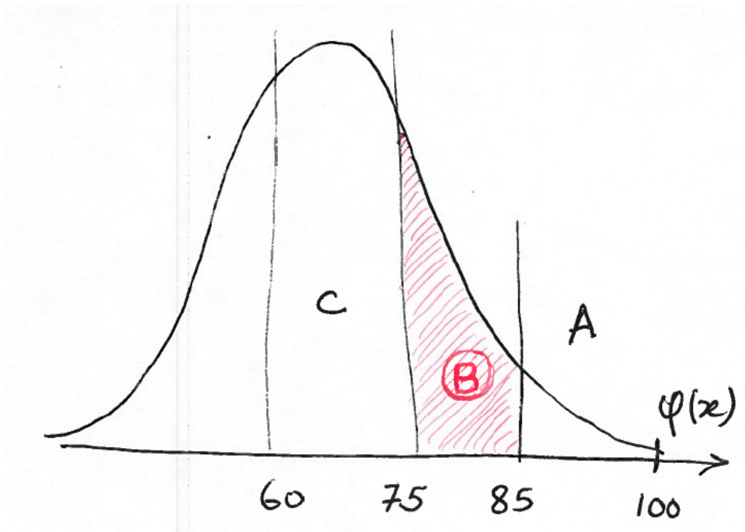
$$[85, 100] \to A; \quad [75, 85] \to B; \quad [60, 75] \to C; \quad [50, 60] \to D; \quad [0, 50] \to E.$$

Trouver la probabilité qu'un étudiant pris au hasard ait obtenu la note B.

A) 0.094 B) 0.184 C) 0.231 D) 0.124 E) 0.1359

Soit X_i la note de l'étudiant i, de telle sorte que $X_i \sim \mathcal{N}(65, 10^2)$. La probabilité qu'il ait un B est

$$\mathbb{P}(X_i \in [75, 85]) = \mathbb{P}(X_i \leq 85) - \mathbb{P}(X_i \leq 75)$$



Or

$$\mathbb{P}(X_i \leq 85) = \mathbb{P}\left(\frac{X_i - 65}{10} \leq \frac{85 - 65}{10}\right) \text{ avec } Z = \frac{X_i - 65}{10} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

i.e.

$$\mathbb{P}(X_i \leq 85) = \mathbb{P}(Z \leq 2) \sim 0.9772$$

alors que

$$\mathbb{P}(X_i \leq 75) = \mathbb{P}\left(\frac{X_i - 65}{10} \leq \frac{75 - 65}{10}\right) \text{ avec } Z = \frac{X_i - 65}{10} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

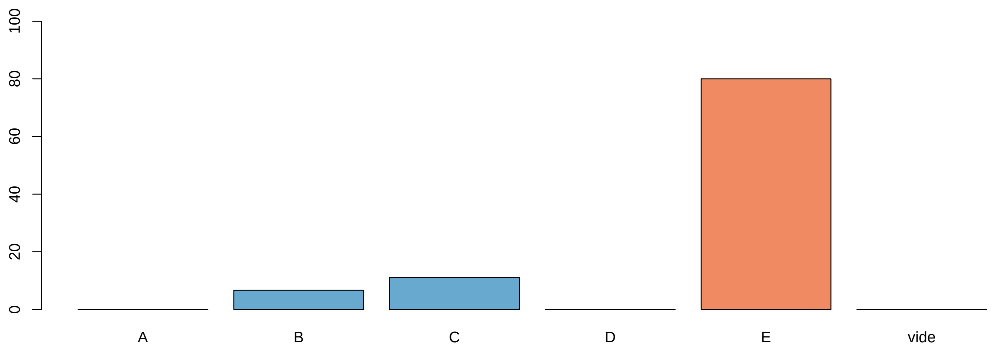
i.e.

$$\mathbb{P}(X_i \leq 75) = \mathbb{P}(Z \leq 1) \sim 0.8413$$

Aussi,

$$\mathbb{P}(X_i \in [75, 85]) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

qui est la réponse E.



$\boxed{25}$ La perte X d'un assuré suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 100]$. Trouver le déductible d qu'il faut imposer pour que la variance du remboursement soit de 69.75.

A) 85 B) 80 C) 75 D) 70 E) 65

Soit Y le remboursement, $Y = (X - d)_+$. Aussi, de manière très générale

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{100} (x-d)_+ f(x)dx = \int_d^{100} (x-d) f(x)dx$$

alors que

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^{100} (x-d)_+^2 f(x)dx = \int_d^{100} (x-d)^2 f(x)dx$$

Or ici, on a une loi uniforme, et donc $f(x) = 100^{-1}$. Aussi

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{100}\int_d^{100} (x-d)dx = \frac{1}{100}\left[\frac{(x-d)^2}{2}\right]_d^{100} = \frac{(100-d)^2}{200}$$

et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{100}\int_d^{100} (x-d)^2 dx = \frac{1}{100}\left[\frac{(x-d)^3}{3}\right]_d^{100} = \frac{(100-d)^3}{300}$$

Aussi, comme $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,

$$\text{Var}(Y) = \frac{(100-d)^3}{300} - \frac{(100-d)^4}{200^2}$$

J'avoue que je vais être un peu feignant, mais ça permettra aussi de voir une technique qu'on n'a pas vu en cours... On nous propose 5 solutions. et comme la fonction est décroissante, on devrait pouvoir procéder par élimination assez vite... On commence par la solution moyenne, ici 75,

$$\frac{(100-75)^3}{300} - \frac{(100-75)^4}{200^2} \sim 42.31771$$

Comme on veut une variance plus grande, il faudrait a priori un d plus faible. On peut alors tenter 70 ou 65. Allons-y pour le premier,

$$\frac{(100-80)^3}{300} - \frac{(100-80)^4}{200^2} = \frac{279}{4} = 69.75$$

qui est justement le résultat que l'on cherche ! La bonne réponse est alors D.

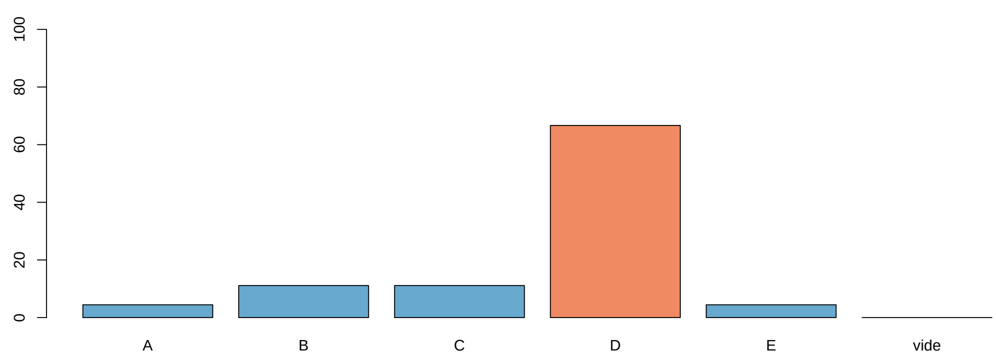
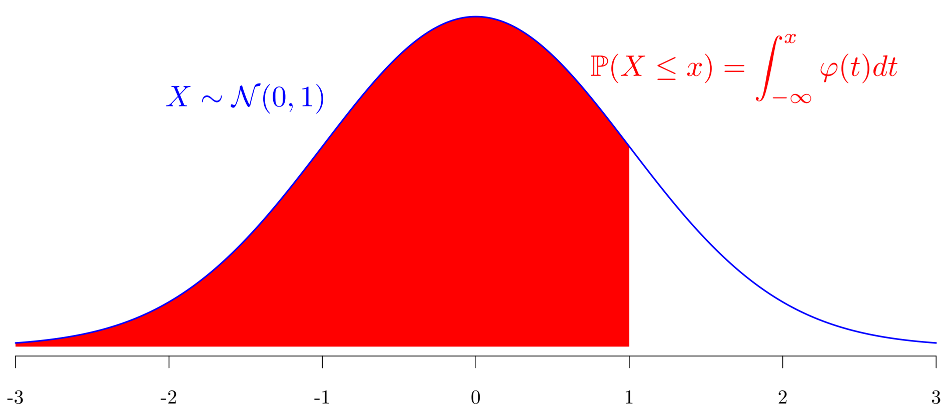


Table de la loi normale La table suivante donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$\Phi(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \text{ où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) du$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990